

Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS



Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura
@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

ALJABAR

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA	1 – 8
Afif Humam	
KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL	9 – 14
Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	
GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF	15 – 20
Maria Vianney Any Herawati	
IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF	21 – 26
Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	
BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV	27 – 32
Eddy Djauhari	
KOREPRESENTASI KOALJABAR $F[G]$	33 – 40
Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	
HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR	41 – 50
Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	
KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})$	51 – 60
Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	

ANALISIS

BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH	61 – 66
Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	
SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON	67 – 76
Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	
FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK (a, b) DAN BEBERAPA SIFATNYA	77 – 82
Firdaus Ubaidillah	
INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL	83 – 90
Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	
PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE	91 – 98
Herry Pribawanto Suryawan	
KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN	99 – 106
Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	
OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM	107 – 114
Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	
PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA	115 – 124
Mochammad Idris	
SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM	125 – 134
Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	

SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	135 – 142
KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $L_{p,\lambda}$ Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	585 - 590
KOMBINATORIK	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	143 – 148
DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	149 – 154
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	155 – 160
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI LM_n Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	161 – 164
PEWARNAAN SIMPUL r – DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	165 – 170
SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	171-176
PENDIDIKAN MATEMATIKA	
LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	177 – 182
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	183 – 188
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	189 – 194
EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD Silvia	195 – 206
ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM N. R. Mumtaz, M. Asikin	207 – 214
PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	215 – 222
MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	223-228
KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	229 – 236
PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	
MATEMATIKA TERAPAN	
MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADAKURVA LINEAR C_L TERHADAP α	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	
STATISTIKA	
PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA	341 -350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR	351 - 358

KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)	397 – 404
Wahidaturrahmi	
PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS	443 – 450
Samir Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $\mathcal{L}^{p,\lambda}$

Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim

Kelompok Keahlian Analisis dan Geometri, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
*e-mail: moch.taufik81@students.itb.ac.id

Abstrak. Pada makalah ini, kami membahas syarat cukup dan perlu dari keterbatasan operator tipe Volterra pada ruang Morrey analitik $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{D})$, untuk $p > 1$, dan $0 < \lambda < 1$ pada cakram satuan \mathbb{D} di bidang kompleks. Lebih lanjut, kami melakukan investigasi pada keterbatasan operator tipe Volterra dari ruang Morrey analitik $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ ke $\mathcal{L}^{q,\eta}(\mathbb{D})$, dengan $p \geq q > 1$, $0 < \lambda < 1$, dan $\eta = 1 - \frac{q}{p}(1 - \lambda)$. Hasil di kasus kedua ini memperluas hasil di kasus pertama, dan beberapa hasil yang telah diperoleh tentang keterbatasan operator tipe Volterra pada ruang fungsi analitik.

Kata Kunci: keterbatasan, operator tipe Volterra, ruang Morrey analitik

1 PENDAHULUAN

Misalkan \mathbb{D} menyatakan cakram satuan buka di bidang kompleks \mathbb{C} , dan $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ menyatakan himpunan semua fungsi yang analitik pada \mathbb{D} . Untuk $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, operator tipe Volterra T_g didefinisikan sebagai

$$T_g f(z) := \int_0^z f(w)g'(w) dw$$

dengan $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Operator T_g merupakan operator Volterra klasik untuk $g(z) = z$. Pembahasan tentang keterbatasan operator T_g antara fungsi-fungsi analitik menjadi salah satu topik yang menarik untuk dikaji. Operator T_g pertama kali diperkenalkan oleh Pommerenke pada ruang Hardy H^2 [1]. Aleman dan Siskakis di [2] memperoleh perluasan dari hasil Pommerenke pada setiap ruang H^p , untuk $1 \leq p < \infty$. Siskakis dan Zhao, mempelajari keterbatasan T_g pada ruang BMOA [3]. Studi lainnya tentang operator ini dapat dilihat, sebagai contoh, di [4, 5, 6, 7] dan referensi-referensi di dalamnya.

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$, ruang Morrey analitik $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ didefinisikan sebagai ruang dari semua fungsi di H^p sedemikian sehingga fungsi batasnya memenuhi

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_{I \subset \mathbb{T}} \left(\frac{1}{|I|^\lambda} \int_I |f(\zeta) - f_I|^p \frac{|d\zeta|}{2\pi} \right)^{1/p} < \infty$$

dengan \mathbb{T} menyatakan batas dari \mathbb{D} , I menyatakan busur pada \mathbb{T} ,

$$\zeta = e^{i\theta}, \quad d\zeta = ie^{i\theta} d\theta, \quad |I| = (2\pi)^{-1} \int_I |d\zeta|, \quad f_I = (2\pi|I|)^{-1} \int_I f(\zeta) |d\zeta|,$$

dan H^p adalah ruang Hardy, yakni himpunan semua $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sehingga

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{r \in (0,1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p} < \infty.$$

Jelas bahwa $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ merupakan semi-norma untuk ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Sebuah norma pada ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ didefinisikan oleh

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = |f(0)| + \|f\|_{p,\lambda}.$$

Khusus untuk $p = 2$, ruang $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ pada bidang kompleks pertama kali diperkenalkan oleh Wu dan Xie [8]. Ketika $\lambda = 0$, dan $\lambda = 1$, kita punya $\mathcal{L}^{p,0} = H^p$ dan $\mathcal{L}^{p,1} = \text{BMOA}$. Jika $p \geq q$ dan $(\lambda - 1)/p \geq (\eta - 1)/q$, ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ memenuhi $\mathcal{L}^{p,\lambda} \subseteq \mathcal{L}^{q,\eta}$. Pembaca dapat merujuk ke [8, 9], dan referensi di dalamnya, tentang sifat-sifat umum dari ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Dalah beberapa tahun belakangan, studi tentang operator T_g pada ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ telah banyak dipelajari. Diantaranya, Li, Liu, dan Lou mempelajari keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ [10], dan Wang meninjau keterbatasan T_g dari $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ ke $\mathcal{L}^{2,1-\frac{2}{q}(1-\lambda)}$ [11]. Di [12], Yuan dan Tong memperoleh hasil parsial tentang keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Terdorong oleh hasil-hasil yang mereka peroleh, kami melakukan investigasi tentang keterbatasan operator T_g pada dua kasus:

$$\begin{aligned} T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} &\rightarrow \mathcal{L}^{p,\lambda}, & 2 \leq p < \infty, \\ T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} &\rightarrow \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}, & p \geq q > 1. \end{aligned}$$

Pada kasus pertama, hasil kami akan melengkapi hasil di [12] (Lihat Teorema 7 and Teorema 8). Pada kasus kedua kami membahas syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan T_g di antara dua ruang Morrey.

Dalam keseluruhan makalah ini, kita notasikan $F \lesssim G$ apabila terdapat konstanta positif C yang tidak bergantung kepada F dan G sedemikian sehingga $F \leq CG$. Lebih lanjut, notasikan $F \approx G$ (F dapat dibandingkan dengan G) ketika $F \lesssim G \lesssim F$ berlaku.

2 LEMA-LEMA PENTING

Dalam bagian ini dituliskan beberapa lema untuk membantu pembuktian hasil utama. Kita mulai dengan lema terkait norma dari ruang Morrey analitik yang dikutip dari [9].

Lema 1. Untuk $0 < \lambda \leq 1$ dan $1 < p < \infty$, fungsi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ merupakan fungsi di $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ jika dan hanya jika

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda,*}} := \sup_{a \in \mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{\frac{1-\lambda}{p}} \|f \circ \varphi_a - f(a)\|_{H^p} < \infty.$$

Lema 2. Misalkan $0 < \lambda < 1$ dan $1 < p < \infty$. Jika $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$, maka

$$|f(z)| \lesssim \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda,*}}}{(1 - |z|^2)^{\frac{1-\lambda}{p}}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Kita ingat kembali bahwa, untuk $0 < p < \infty$, ukuran Borel tak negatif μ pada \mathbb{D} disebut sebagai ukuran Carleson- p jika

$$\sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{\mu(S(I))}{|I|^p} < \infty,$$

dengan $S(I) = \{z \in \mathbb{D} : 1 - |I| \leq |z| < 1, \text{ dan } z/|z| \in I\}$. Ketika $p = 1$, ukuran Carleson- p tereduksi menjadi ukuran Carleson (lihat, sebagai contoh, [13, 14]). Lema berikutnya dikutip dari [13] dan [15].

Lema 3. Asumsikan μ adalah ukuran tak negatif pada \mathbb{D} . Maka μ merupakan ukuran Carleson jika dan hanya jika ketaksamaan

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) \lesssim \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p d\zeta = \|f\|_{H^p}$$

berlaku untuk setiap $f \in H^p, p \geq 1$.

Lema 4. Misalkan μ adalah ukuran tak negatif pada \mathbb{D} dan $0 < p, q < \infty$. Maka μ merupakan ukuran Carleson- p jika dan hanya jika

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^q}{|1 - \bar{a}z|^{p+q}} d\mu(z) < \infty.$$

Untuk $1 \leq p < \infty, -2 < q < \infty$, dan $0 \leq s < \infty$, ruang $F(p, q, s)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sedemikian sehingga

$$\|f\|_{F(p,q,s)}^p := \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^q (1 - |\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) < \infty.$$

dengan $\varphi_a(z) = (a - z)/(1 - \bar{a}z), a \in \mathbb{D}$ dan $dA(z) = (r/\pi) dr d\theta$ menyatakan ukuran luas ternormalisasi pada \mathbb{D} . Ruang $F(p, q, s)$, yang diperkenalkan oleh Zhao di [16], memuat banyak ruang fungsi klasik, diantaranya adalah ruang Besov, Dirichlet, BMOA, Q_s dan Bloch- α . Jika $s + q \leq -1$, ruang $F(p, q, s)$ hanya berisi fungsi konstan [16]. Fungsi di $F(p, q, s)$ juga dapat dideskripsikan menggunakan ukuran Carleson- p berdasarkan lema berikut [16].

Lema 5. Misalkan $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Maka $f \in F(p, q, s)$ jika dan hanya jika ukuran μ_f dengan

$$d\mu_f(z) = |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^{q+s} dA(z)$$

merupakan ukuran Carleson- s .

Lema dan teorema berikut disadur dari [12]. Lema ini memberikan estimasi untuk semi-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda,*}}$. Sebagai konsekuensinya, diperoleh hasil tentang keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Lema 6. Misalkan $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda}, 0 < \lambda < 1$.

(a) Jika $1 < p \leq 2$, kita punya

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda,*}}^p \lesssim \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^{2-\lambda}}{|1 - \bar{a}z|^2} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z).$$

(b) Jika $2 \leq p < \infty$, kita punya

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda,*}}^p \gtrsim \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^{2-\lambda}}{|1 - \bar{a}z|^2} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z).$$

Teorema 7. Misalkan $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ dan $0 < \lambda < 1$. Jika $1 < p \leq 2$ dan $g \in F(p, p - 2, 1)$, maka $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{p,\lambda}$ terbatas.

3 HASIL UTAMA

Pertama-tama, kita berikan syarat perlu untuk keterbatasan T_g on $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Digabungkan dengan Teorema 7, maka kita dapatkan syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Teorema 8. Misalkan $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ dan $0 < \lambda < 1$. Jika $2 \leq p < \infty$ dan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{p,\lambda}$ terbatas, maka $g \in F(p, p - 2, 1)$.

Bukti. Untuk sembarang busur $I \subseteq \mathbb{T}$, misalkan ζ adalah pusat dari I dan tulis $b = (1 - |I|)\zeta$. Mudah dibuktikan dengan argumen geometris bahwa $1 - |b|^2 \approx |1 - \bar{b}z| \approx |I|$ untuk semua $z \in S(I)$. Misalkan f_b adalah fungsi pada \mathbb{D} yang didefinisikan oleh

$$f_b(z) = \frac{(1 - |b|^2)^{1-\frac{1-\lambda}{p}}}{1 - \bar{b}z}.$$

Telah dibuktikan di [11] bahwa $f_b \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$ dan $\|f_b\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \lesssim 1$. Karena T_g terbatas, kita punya $T_g f_b \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$. Karena $2 \leq p < \infty$, berdasarkan Lema 6(b) dan Lema 4, kita simpulkan bahwa ukuran μ pada \mathbb{D} , dimana $d\mu(z) = |(T_g f_b)'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z)$ merupakan ukuran Carleson- λ , yang berarti

$$\sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{\mu(S(I))}{|I|^\lambda} = \sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |(T_g f_b)'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z) < \infty.$$

Perhatikan bahwa fungsi f_b memenuhi $|f_b(z)| \approx |I|^{(\lambda-1)/p}$ untuk semua $z \in S(I)$. Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |(T_g f_b)'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z) &= \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |f_b(z)|^p |g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z) \\ &\approx \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |I|^{\lambda-1} |g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z) \\ &= \frac{1}{|I|} \int_{S(I)} |g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z). \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita simpulkan bahwa ukuran μ_g dengan $d\mu_g(z) = |g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dA(z)$ merupakan ukuran Carleson, yang ekuivalen dengan $g \in F(p, p - 2, 1)$. \square

Catatan 9. Untuk $p = 2$, $F(p, p - 2, 1) = \text{BMOA}$ [16]. Akibatnya, berdasarkan Teorema 7 dan Teorema 8, $g \in \text{BMOA}$ merupakan syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan operator $T_g : \mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{2,\lambda}$. Hasil ini telah dibuktikan di [10].

Selanjutnya kita tinjau kasus $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$, untuk $p \geq q > 1$. Syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan T_g dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 10. Misalkan $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $0 < \lambda < 1$, dan $p \geq q$.

- (a) Jika $1 < q \leq 2$ dan $g \in F(q, q - 2, 1)$, maka $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$ terbatas.
- (b) Jika $2 \leq q < \infty$ dan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$ terbatas, maka $g \in F(q, q - 2, 1)$.

Bukti. Kita hanya tuliskan bukti untuk bagian (a). Bukti untuk bagian (b) serupa dengan bukti Teorema 8. Misalkan $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$, dan asumsikan $g \in F(q, q - 2, 1)$, $1 < q \leq 2$. Dengan menggunakan Lema 6 kita punya

$$\begin{aligned} \|T_g f\|_{\mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)},*}^q &\lesssim \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1 - \bar{a}z|^2} |f(z)|^q |g'(z)|^q (1 - |z|^2)^{q-1} dA(z) \\ &\lesssim \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1 - \bar{a}z|^2} |f(a)|^q |g'(z)|^q (1 - |z|^2)^{q-1} dA(z) \\ &\quad + \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1 - \bar{a}z|^2} |f(z) - f(a)|^q |g'(z)|^q (1 - |z|^2)^{q-1} dA(z). \end{aligned}$$

Misalkan I_1 dan I_2 berturut-turut menyatakan integral pertama dan kedua pada penjumlahan di atas. Pertama-tama kita cari estimasi I_1 . Berdasarkan Lema 2,

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1 - \bar{a}z|^2} (1 - |a|^2)^{\frac{q}{p}(\lambda-1)} \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}^q |g'(z)|^q (1 - |z|^2)^{q-1} dA(z) \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*}^q \|g\|_{F(q,q-2,1)}^q < \infty. \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan estimasi dari I_2 , kita gunakan Lema 5 untuk menyimpulkan bahwa ukuran μ_g dengan $d\mu_g(z) = |g'(z)|^q (1 - |z|^2)^{q-1} dA(z)$ merupakan ukuran Carleson. Tuliskan integral kedua sebagai

$$I_2 = \sup_{a \in \mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{f(z) - f(a)}{(1 - \bar{a}z)^{2/q}} \right|^q d\mu_g(z).$$

Kondisi $p \geq q$ mengakibatkan $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda} \subset \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)} \subset H^q$. Mudah untuk menunjukkan bahwa $(f(z) - f(a))/(1 - \bar{a}z)^{2/q} \in H^q$. Karena μ_g adalah ukuran Carleson, maka dengan menggunakan Lema 3 kita dapatkan

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \sup_{a \in \mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(\zeta) - f(a)}{(1 - \bar{a}\zeta)^{2/q}} \right|^q |d\zeta| \\ &= \sup_{a \in \mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{\frac{q}{p}(1-\lambda)} \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta) - f(a)|^q \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\zeta|^2} |d\zeta|. \end{aligned}$$

Substitusi $\xi = \varphi_a(\zeta) \in \mathbb{T}$ pada integral terakhir. Kita punya

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \sup_{a \in \mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{1-(1-\frac{q}{p}(1-\lambda))} \int_{\mathbb{T}} |f \circ \varphi_a(\xi) - f(a)|^q |d\xi| \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)},*}^q \lesssim \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*}^q < \infty. \end{aligned}$$

Jadi, $\|T_g f\|_{\mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)},*} < \infty$ dan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$ terbatas. \square

Catatan 11. Jika $p = q$, Teorema 10 tereduksi menjadi Teorema 7 dan Teorema 8. Lebih lanjut, jika $p \geq q = 2$, $g \in \text{BMOA}$ merupakan syarat perlu dan cukup untuk keterbatasan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{L}^{2,1-\frac{2}{q}(1-\lambda)}$. Hasil ini telah ditunjukkan di [11].

DAFTAR PUSTAKA

- [1] C. Pommerenke, “Schlichte funktionen und analytische funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation”, *Comment Math. Helv.*, 52, 591–602, 1977.
- [2] A. Aleman and A. G. Siskakis, “An integral operator on H^p ”, *Complex Variables Theory Appl.*, 28, 149–158, 1995.
- [3] A. G. Siskakis and R. Zhao, “A Volterra type operator on spaces of analytic functions”, *Contemp. Math.*, 232, 299–312, 1999.
- [4] A. Aleman and A. G. Siskakis, “Integration operator on Bergman spaces”, *Indiana University Mathematics Journal*, 46, 337–356, 1997.
- [5] A. Aleman and J. A. Cima, “An integral operator on H^p and Hardy’s inequality”, *Journal D’analyse Mathématique*, 85, 157–176, 2001.
- [6] J. Xiao, “The Q_p Carleson measure problem”, *Adv. Math.*, 217(5), 2075–2088, 2008.
- [7] A. M. Anderson, “Multiplication and Integral Operators On Spaces of Analytic Functions”, Doctoral Dissertation, University of Hawai’i at Mānoa, 2010.
- [8] Z. Wu and C. Xie, “ Q spaces and Morrey spaces”, *Journal of Functional Analysis*, 201, 282–297, 2003.
- [9] J. Xiao and C. Yuan, “Analytic Campanato spaces and their compositions”, *J. Indiana Univ. Math.*, 64(4), 1001–1025, 2015.
- [10] P. Li, J. Liu, and Z. Lou, “Integral operators on analytic Morrey spaces”, *Sci. China Math.*, 57(9), 1961–1974, 2014.
- [11] J. Wang, “The Carleson measure problem between analytic Morrey spaces”, *Canadian Mathematical Bulletin*, 59(4), 879–890, 2016.
- [12] C. Yuan and C. Tong, “On analytic Campanato and $F(p, q, s)$ spaces”, *Complex Analysis and Operator Theory*, 12, 1845–1875, 2018.
- [13] L. Carleson, “Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem”, *Ann. Math.*, 76(3), 1962.
- [14] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Second, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007.
- [15] J. Xiao, *Geometric Q_p Functions*, Frontiers in Mathematics, Basel: Birkhäuser-Verlag, 2006.
- [16] R. Zhao, “On a general family of function spaces”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss.*, 105, 1–56, 1996.

ISSN 2829-3770



9

772829

377007