KNM 2021
Konferensi Nasional MATEMATIKA

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS

Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.585-590

KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $\mathcal{L}^{p,\lambda}$

Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim

Kelompok Keahlian Analisis dan Geometri, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
*e-mail: moch.taufik81@students.itb.ac.id

Abstrak. *Pada makalah ini, kami membahas syarat cukup dan perlu dari keterbatasan operator tipe Volterra pada ruang Morrey analitik $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{D})$, untuk $p > 1$, dan $0 < \lambda < 1$ pada cakram satuan $\mathbb{D}$ di bidang kompleks. Lebih lanjut, kami melakukan investigasi pada keterbatasan operator tipe Volterra dari ruang Morrey analitik $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ ke $\mathcal{L}^{q,\eta}(\mathbb{D})$, dengan $p \geq q > 1$, $0 < \lambda < 1$, dan $\eta = 1 - \frac{q}{p}(1-\lambda)$. Hasil di kasus kedua ini memperluas hasil di kasus pertama, dan beberapa hasil yang telah diperoleh tentang keterbatasan operator tipe Volterra pada ruang fungsi analitik.*

Kata Kunci: keterbatasan, operator tipe Volterra, ruang Morrey analitik

1 PENDAHULUAN

Misalkan $\mathbb{D}$ menyatakan cakram satuan buka di bidang kompleks $\mathbb{C}$, dan $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ menyatakan himpunan semua fungsi yang analitik pada $\mathbb{D}$. Untuk $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, operator tipe Volterra T_g didefinisikan sebagai

$$T_g f(z) := \int_0^z f(w) g'(w)\, \mathrm{d}w$$

dengan $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Operator T_g merupakan operator Volterra klasik untuk $g(z) = z$. Pembahasan tentang keterbatasan operator T_g antara fungsi-fungsi analitik menjadi salah satu topik yang menarik untuk dikaji. Operator T_g pertama kali diperkenalkan oleh Pommerenke pada ruang Hardy H^2 [1]. Aleman dan Siskakis di [2] memperoleh perluasan dari hasil Pommerenke pada setiap ruang H^p, untuk $1 \leq p < \infty$. Siskakis dan Zhao, mempelajari keterbatasan T_g pada ruang BMOA [3]. Studi lainnya tentang operator ini dapat dilihat, sebagai contoh, di [4, 5, 6, 7] dan referensi-referensi di dalamnya.

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$, ruang Morrey analitik $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ didefinisikan sebagai ruang dari semua fungsi di H^p sedemikian sehingga fungsi batasnya memenuhi

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_{I \subset \mathbb{T}} \left(\frac{1}{|I|^\lambda} \int_I |f(\zeta) - f_I|^p \frac{|\mathrm{d}\zeta|}{2\pi} \right)^{1/p} < \infty$$

dengan $\mathbb{T}$ menyatakan batas dari $\mathbb{D}$, I menyatakan busur pada $\mathbb{T}$,

$$\zeta = e^{i\theta}, \quad \mathrm{d}\zeta = ie^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta, \quad |I| = (2\pi)^{-1} \int_I |\, \mathrm{d}\zeta|, \quad f_I = (2\pi|I|)^{-1} \int_I f(\zeta) |\, \mathrm{d}\zeta|,$$

dan H^p adalah ruang Hardy, yakni himpunan semua $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sehingga

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{r\in(0,1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p |\,\mathrm{d}\zeta| \right)^{1/p} < \infty.$$

Jelas bahwa $\| \ \|_{p,\lambda}$ merupakan semi-norma untuk ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Sebuah norma pada ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ didefinisikan oleh

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = |f(0)| + \|f\|_{p,\lambda}.$$

Khusus untuk $p = 2$, ruang $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ pada bidang kompleks pertama kali diperkenalkan oleh Wu dan Xie [8]. Ketika $\lambda = 0$, dan $\lambda = 1$, kita punya $\mathcal{L}^{p,0} = H^p$ dan $\mathcal{L}^{p,1} =$ BMOA. Jika $p \geq q$ dan $(\lambda - 1)/p \geq (\eta - 1)/q$, ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ memenuhi $\mathcal{L}^{p,\lambda} \subseteq \mathcal{L}^{q,\eta}$. Pembaca dapat merujuk ke [8, 9], dan referensi di dalamnya, tentang sifat-sifat umum dari ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Dalah beberapa tahun belakangan, studi tentang operator T_g pada ruang $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ telah banyak diperlajari. Diantaranya, Li, Liu, dan Lou mempelajari keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ [10], dan Wang meninjau keterbatasan T_g dari $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ ke $\mathcal{L}^{2,1-\frac{2}{q}(1-\lambda)}$ [11]. Di [12], Yuan dan Tong memperoleh hasil parsial tentang keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Terdorong oleh hasil-hasil yang mereka peroleh, kami melakukan investigasi tentang keterbatasan operator T_g pada dua kasus:

$$T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{p,\lambda}, \quad 2 \leq p < \infty,$$
$$T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}, \quad p \geq q > 1.$$

Pada kasus pertama, hasil kami akan melengkapi hasil di [12] (Lihat Teorema 7 and Teorema 8). Pada kasus kedua kami membahas syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan T_g di antara dua ruang Morrey.

Dalam keseluruhan makalah ini, kita notasikan $F \lesssim G$ apabila terdapat konstanta positif C yang tidak bergantung kepada F dan G sedemikian sehingga $F \leq CG$. Lebih lanjut, notasikan $F \approx G$ (F dapat dibandingkan dengan G) ketika $F \lesssim G \lesssim F$ berlaku.

2 LEMA-LEMA PENTING

Dalam bagian ini dituliskan beberapa lema untuk membantu pembuktian hasil utama. Kita mulai dengan lema terkait norma dari ruang Morrey analitik yang dikutip dari [9].

Lema 1. Untuk $0 < \lambda \leq 1$ dan $1 < p < \infty$, fungsi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ merupakan fungsi di $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ jika dan hanya jika

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*} := \sup_{a\in\mathbb{D}} (1 - |a|^2)^{\frac{1-\lambda}{p}} \|f \circ \varphi_a - f(a)\|_{H^p} < \infty.$$

Lema 2. Misalkan $0 < \lambda < 1$ dan $1 < p < \infty$. Jika $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$, maka

$$|f(z)| \lesssim \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*}}{(1 - |z|^2)^{\frac{1-\lambda}{p}}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Kita ingat kembali bahwa, untuk $0 < p < \infty$, ukuran Borel tak negatif μ pada $\mathbb{D}$ disebut sebagai ukuran Carleson-p jika

$$\sup_{I\subset\mathbb{T}} \frac{\mu(S(I))}{|I|^p} < \infty,$$

dengan $S(I) = \{z \in \mathbb{D} : \ 1 - |I| \leq |z| < 1, \text{ dan } z/|z| \in I\}$. Ketika $p = 1$, ukuran Carleson-p tereduksi menjadi ukuran Carleson (lihat, sebagai contoh, [13, 14]). Lema berikutnya dikutip dari [13] dan [15].

Lema 3. Asumsikan μ adalah ukuran tak negatif pada $\mathbb{D}$. Maka μ merupakan ukuran Carleson jika dan hanya jika ketaksamaan

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \,\mathrm{d}\mu(z) \lesssim \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |\,\mathrm{d}\zeta| = \|f\|_{H^p}$$

berlaku untuk setiap $f \in H^p$, $p \geq 1$.

Lema 4. Misalkan μ adalah ukuran tak negatif pada $\mathbb{D}$ dan $0 < p, q < \infty$. Maka μ merupakan ukuran Carleson-p jika dan hanya jika

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^q}{|1-\bar{a}z|^{p+q}} \,\mathrm{d}\mu(z) < \infty.$$

Untuk $1 \leq p < \infty$, $-2 < q < \infty$, dan $0 \leq s < \infty$, ruang $F(p,q,s)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sedemikian sehingga

$$\|f\|^p_{F(p,q,s)} := \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^q (1-|\varphi_a(z)|^2)^s \,\mathrm{d}A(z) < \infty.$$

dengan $\varphi_a(z) = (a-z)/(1-\bar{a}z)$, $a \in \mathbb{D}$ dan $\mathrm{d}A(z) = (r/\pi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ menyatakan ukuran luas ternormalisasi pada $\mathbb{D}$. Ruang $F(p,q,s)$, yang diperkenalkan oleh Zhao di [16], memuat banyak ruang fungsi klasik, diantaranya adalah ruang Besov, Dirichlet, BMOA, Q_s dan Bloch-α. Jika $s+q \leq -1$, ruang $F(p,q,s)$ hanya berisi fungsi konstan [16]. Fungsi di $F(p,q,s)$ juga dapat dideskripsikan menggunakan ukuran Carleson-p berdasarkan lema berikut [16].

Lema 5. Misalkan $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Maka $f \in F(p,q,s)$ jika dan hanya jika ukuran μ_f dengan

$$\mathrm{d}\mu_f(z) = |f'(z)|^p (1-|z|^2)^{q+s} \,\mathrm{d}A(z)$$

merupakan ukuran Carleson-s.

Lema dan teorema berikut disadur dari [12]. Lema ini memberikan estimasi untuk seminorma $\|\ \|_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*}$. Sebagai konsekuensinya, diperoleh hasil tentang keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Lema 6. Misalkan $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

(a) Jika $1 < p \leq 2$, kita punya

$$\|f\|^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*} \lesssim \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{2-\lambda}}{|1-\bar{a}z|^2} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z).$$

(b) Jika $2 \leq p < \infty$, kita punya

$$\|f\|^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*} \gtrsim \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{2-\lambda}}{|1-\bar{a}z|^2} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z).$$

Teorema 7. Misalkan $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ dan $0 < \lambda < 1$. Jika $1 < p \leq 2$ dan $g \in F(p, p-2, 1)$, maka $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{p,\lambda}$ terbatas.

3 HASIL UTAMA

Pertama-tama, kita berikan syarat perlu untuk keterbatasan T_g on $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Digabungkan dengan Teorema 7, maka kita dapatkan syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan T_g pada $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Teorema 8. Misalkan $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ dan $0 < \lambda < 1$. Jika $2 \leq p < \infty$ dan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{p,\lambda}$ terbatas, maka $g \in F(p, p-2, 1)$.

Bukti. Untuk sembarang busur $I \subseteq \mathbb{T}$, misalkan ζ adalah pusat dari I dan tulis $b = (1 - |I|)\zeta$. Mudah dibuktikan dengan argumen geometris bahwa $1 - |b|^2 \approx |1 - \bar{b}z| \approx |I|$ untuk semua $z \in S(I)$. Misalkan f_b adalah fungsi pada $\mathbb{D}$ yang didefinisikan oleh

$$f_b(z) = \frac{(1 - |b|^2)^{1-\frac{1-\lambda}{p}}}{1 - \bar{b}z}.$$

Telah dibuktikan di [11] bahwa $f_b \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$ dan $\|f_b\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} \lesssim 1$. Karena T_g terbatas, kita punya $T_g f_b \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$. Karena $2 \leq p < \infty$, berdasarkan Lema 6(b) dan Lema 4, kita simpulkan bahwa ukuran μ pada $\mathbb{D}$, dimana $\mathrm{d}\mu(z) = |(T_g f_b)'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z)$ merupakan ukuran Carleson-λ, yang berarti

$$\sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{\mu(S(I))}{|I|^\lambda} = \sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |(T_g f_b)'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z) < \infty.$$

Perhatikan bahwa fungsi f_b memenuhi $|f_b(z)| \approx |I|^{(\lambda-1)/p}$ untuk semua $z \in S(I)$. Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |(T_g f_b)'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z) &= \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |f_b(z)|^p |g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z) \\ &\approx \frac{1}{|I|^\lambda} \int_{S(I)} |I|^{\lambda-1} |g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z) \\ &= \frac{1}{|I|} \int_{S(I)} |g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z). \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita simpulkan bahwa ukuran μ_g dengan $\mathrm{d}\mu_g(z) = |g'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-1} \,\mathrm{d}A(z)$ merupakan ukuran Carleson, yang ekuivalen dengan $g \in F(p, p-2, 1)$. □

Catatan 9. Untuk $p = 2$, $F(p, p-2, 1) = \mathrm{BMOA}$ [16]. Akibatnya, berdasarkan Teorema 7 dan Teorema 8, $g \in \mathrm{BMOA}$ merupakan syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan operator $T_g : \mathcal{L}^{2,\lambda} \to \mathcal{L}^{2,\lambda}$. Hasil ini telah dibuktikan di [10].

Selanjutnya kita tinjau kasus $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{q, 1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$, untuk $p \geq q > 1$. Syarat cukup dan perlu untuk keterbatasan T_g dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 10. Misalkan $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $0 < \lambda < 1$, dan $p \geq q$.

(a) Jika $1 < q \leq 2$ dan $g \in F(q, q-2, 1)$, maka $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{q, 1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$ terbatas.

(b) Jika $2 \leq q < \infty$ dan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{q, 1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$ terbatas, maka $g \in F(q, q-2, 1)$.

Bukti. Kita hanya tuliskan bukti untuk bagian (a). Bukti untuk bagian (b) serupa dengan bukti Teorema 8. Misalkan $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$, dan asumsikan $g \in F(q, q-2, 1)$, $1 < q \leq 2$. Dengan menggunakan Lema 6 kita punya

$$\begin{aligned}
\|T_g f\|^q_{\mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)},*} &\lesssim \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1-\bar{a}z|^2} |f(z)|^q |g'(z)|^q (1-|z|^2)^{q-1}\,\mathrm{d}A(z) \\
&\lesssim \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1-\bar{a}z|^2} |f(a)|^q |g'(z)|^q (1-|z|^2)^{q-1}\,\mathrm{d}A(z) \\
&\quad + \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1-\bar{a}z|^2} |f(z)-f(a)|^q |g'(z)|^q (1-|z|^2)^{q-1}\,\mathrm{d}A(z).
\end{aligned}$$

Misalkan I_1 dan I_2 berturut-turut menyatakan integral pertama dan kedua pada penjumlahan di atas. Pertama-tama kita cari estimasi I_1. Berdasarkan Lema 2,

$$\begin{aligned}
I_1 &\lesssim \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)}}{|1-\bar{a}z|^2} (1-|a|^2)^{\frac{q}{p}(\lambda-1)} \|f\|^q_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} |g'(z)|^q (1-|z|^2)^{q-1}\,\mathrm{d}A(z) \\
&= \|f\|^q_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*} \|g\|^q_{F(q,q-2,1)} < \infty.
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan estimasi dari I_2, kita gunakan Lema 5 untuk menyimpulkan bahwa ukuran μ_g dengan $\mathrm{d}\mu_g(z) = |g'(z)|^q(1-|z|^2)^{q-1}\,\mathrm{d}A(z)$ merupakan ukuran Carleson. Tuliskan integral kedua sebagai

$$I_2 = \sup_{a\in\mathbb{D}} (1-|a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{f(z)-f(a)}{(1-\bar{a}z)^{2/q}} \right|^q \mathrm{d}\mu_g(z).$$

Kondisi $p \geq q$ mengakibatkan $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda} \subset \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)} \subset H^q$. Mudah untuk menunjukkan bahwa $(f(z)-f(a))/(1-\bar{a}z)^{2/q} \in H^q$. Karena μ_g adalah ukuran Carleson, maka dengan menggunakan Lema 3 kita dapatkan

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \sup_{a\in\mathbb{D}} (1-|a|^2)^{1+\frac{q}{p}(1-\lambda)} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(\zeta)-f(a)}{(1-\bar{a}\zeta)^{2/q}} \right|^q |\,\mathrm{d}\zeta| \\
&= \sup_{a\in\mathbb{D}} (1-|a|^2)^{\frac{q}{p}(1-\lambda)} \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)-f(a)|^q \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}\zeta|^2} |\,\mathrm{d}\zeta|.
\end{aligned}$$

Substitusi $\xi = \varphi_a(\zeta) \in \mathbb{T}$ pada integral terakhir. Kita punya

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \sup_{a\in\mathbb{D}} (1-|a|^2)^{1-\left(1-\frac{q}{p}(1-\lambda)\right)} \int_{\mathbb{T}} |f\circ\varphi_a(\xi) - f(a)|^q |\,\mathrm{d}\xi| \\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)},*} \lesssim \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda},*} < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $\|T_g f\|_{\mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)},*} < \infty$ dan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{q,1-\frac{q}{p}(1-\lambda)}$ terbatas. $\square$

Catatan 11. Jika $p = q$, Teorema 10 tereduksi menjadi Teorema 7 dan Teorema 8. Lebih lanjut, jika $p \geq q = 2$, $g \in \mathrm{BMOA}$ merupakan syarat perlu dan cukup untuk keterbatasan $T_g : \mathcal{L}^{p,\lambda} \to \mathcal{L}^{2,1-\frac{2}{q}(1-\lambda)}$. Hasil ini telah ditunjukkan di [11].

DAFTAR PUSTAKA

[1] C. Pommerenke, “Schlichte funktionen und analytische funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation”, *Comment Math. Helv.*, 52, 591–602, 1977.

[2] A. Aleman and A. G. Siskakis, “An integral operator on H^p”, *Complex Variables Theory Appl.*, 28, 149–158, 1995.

[3] A. G. Siskakis and R. Zhao, “A Volterra type operator on spaces of analytic functions”, *Contemp. Math.*, 232, 299–312, 1999.

[4] A. Aleman and A. G. Siskakis, “Integration operator on Bergman spaces”, *Indiana University Mathematics Journal*, 46, 337–356, 1997.

[5] A. Aleman and J. A. Cima, “An integral operator on H^p and Hardy’s inequality”, *Journal D’analyse Mathematique*, 85, 157–176, 2001.

[6] J. Xiao, “The Q_p Carleson measure problem”, *Adv. Math.*, 217(5), 2075–2088, 2008.

[7] A. M. Anderson, “Multiplication and Integral Operators On Spaces of Analytic Functions”, Doctoral Dissertation, University of Hawai’i at Mānoa, 2010.

[8] Z. Wu and C. Xie, “Q spaces and Morrey spaces”, *Journal of Functional Analysis*, 201, 282–297, 2003.

[9] J. Xiao and C. Yuan, “Analytic Campanato spaces and their compositions”, *J. Indiana Univ. Math.*, 64(4), 1001–1025, 2015.

[10] P. Li, J. Liu, and Z. Lou, “Integral operators on analytic Morrey spaces”, *Sci. China Math.*, 57(9), 1961–1974, 2014.

[11] J. Wang, “The Carleson measure problem between analytic Morrey spaces”, *Canadian Mathematical Bulletin*, 59(4), 879–890, 2016.

[12] C. Yuan and C. Tong, “On analytic Campanato and $F(p, q, s)$ spaces”, *Complex Analysis and Operator Theory*, 12, 1845–1875, 2018.

[13] L. Carleson, “Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem”, *Ann. Math.*, 76(3), 1962.

[14] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Second, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007.

[15] J. Xiao, *Geometric Q_p Functions*, Frontiers in Mathematics, Basel: Birkhäuser-Verlag, 2006.

[16] R. Zhao, “On a general family of function spaces”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss.*, 105, 1–56, 1996.

ISSN 2829-3770