Proceeding Konferensi Nasional Matematika (KNM) XXI
Universitas Mataram, 18-19 Oktober 2022
Dipublikasikan online pada:
PATTIMURA PROCEEDING: Conference of Science and Technology
e-ISSN: 2829-3770, volume 4 issue 1, pp. 29-34, Maret 2023

Hipergrup dan Komputasi Grup Fundamental dari Hipergrup Berhingga

Soleha[1, a)] dan Subiono [b)]

[1]*Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya Indonesia.*

[a]*seha_07@matematika.its.ac.id*
[b]*subiono2008@matematika.its.ac.id*

[a)]Corresponding author: seha_07@matematika.its.ac.id

Abstract. Hipergrup adalah salah satu topik menarik yang banyak perekmbangannya saat ini. Selain mempelajari subhipergrup, terdapat matematikawan yang mengkomputasi hipergrup berhingga. Misalkan $(H,\circ)$ adalah hipergrup dan β^*adalah relasi fundamental pada H, yaitu, relasi ekivalen terkecil pada H sedemikian hingga $(H/\beta^* \otimes)$ adalah grup faktor. Pada paper ini akan dikaji komputasi grup fundaemntal dari hipergrup berhingga yang diberikan. Langkah pertama adalah mendapatkan sifat-sifat aljabar untuk mendapatkan kelas ekivalen dari relasi fundamental dan selanjutnya diperkenalkan suatu algoritma untuk mengkomputasi kelas-kelasnya tersebut.Selain itu, berdasarkan algoritma ini, dikembangkan suatu aplikasi untuk mengkonstruksi kelas-kelas ekivalen dari β^* dan selanjutnya mengkomputasi grup fundmental $(H/\beta^* \otimes)$. Lebih jauh, digunakan sub-program untuk mengkonstruksi seluruh hiperoperasi, kuasihipergrup, hipergrup yang berkardinalitas kurang dari atau sama dengan tiga dan medapatkan grup fundamentalnya. Yang terakhir, diberikan algoritma dan program disertai beberapa contoh terkait komputasi grup fundamental dari hipergrup dengan order yang berbeda-beda. Metode yang digunakan adalah studi literatur.

Keywords: Hipergrup, grup fundamental, kelas ekivalen
2020 *Mathematical Subject Classification*: 20Cxx

PENDAHULUAN

Teori hiperstuktur aljabar ditemukan di tahun 1934, ketika gagasan suatu hipergrup diberikan oleh Marty (Marty,1934) sebagai perluasan dari grup. Setelah itu, beberapa paper ditulis untuk mengkonstruksi hipergrup berhingga. Karena hipergrup lebih bervariasi daripada grup, contohnya hanya terdapat satu grup dengan kardinalitas tiga, sedangkan terdapat 3999 hipergrup yang isomorfis dengan masing-masing mempunyai kardinaitas tiga. Seperti diketahui, salah satu topik utama pada teori hipergrup adalah relasi fundamental$\boldsymbol{\beta}^*$. Relasi ini memainkan peranan penting pada teori ini. Tujuan dari paper ini adalah untuk memperkenalkan hipergrup dan jenis-jenis subhipergrup yang merupakan kajian dari Davvaz (Davvaz, 2013). Selain itu juga untuk mengkaji suatu aplikasi dalam mengkomputasi grup fundamental dari sebarang hipergrup berhingga. Diperoleh dua algoritma dan kemudian dikembangkan untuk mengkomputasi kelas ekivalen dari $\boldsymbol{\beta}^*$ dan grup fundamental $(\boldsymbol{H}/\boldsymbol{\beta}^*, \otimes)$. Diberikan juga beberapa contoh untuk mengilustrasikan algoritmanya.

Misalkan $\boldsymbol{H}$ himpunan tak kosong dan $\boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{H})$ adalah himpunan dari seluruh himpnan bagian dari $\boldsymbol{H}$. Suatu operasi hiper pada $\boldsymbol{H}$ adalah pemetaan $\circ: \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{H})$. Pasangan $(\boldsymbol{H},\circ)$ dikatakan hipergrupoid Misalkan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ himpunan bagian dari $\boldsymbol{H}$. Hiperproduk $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ didefinisikan oleh

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = \cup_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}\, \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}.$$

Untuk selanjutnya, ditulis ab daripada $a \circ b$ untuk $a, b \in H$. Suatu hipergrupoid $(H,\circ)$ dikatakan semihipergrup jika$\circ$ asosiatif. Suatu hipergrupoid $(H,\circ)$ dikatakan kuasi hipergrup jika $x \circ H = H \circ x = H$ (reproduktif) untuk setiap $x \in H$. Dikatakan $(H,\circ)$ adalah hipergrup $(H,\circ)$ jika asosiatif dan juga reproduktif. Didefinisikan relasi $\beta = \cup_{n\geq 1} \beta_n$ sedemikian hingga $\beta_n = \{a, a |\ a \in H\}$. Suatu alat yang berguna pada pembelajaran teori hiperstruktur adalah relasi β^* yang didefinisikan sebagai relasi terkecil pada H sedemikian hinggaH/β^*adalah grup dibawah operasi $\beta^*(a) \otimes \beta^*(b) = \beta^*(c), c \in a \circ b$. Relasi ini dinamakan relasi fundamental dan himpunan $(H/\beta^*, \otimes)$dinamakan grup fundamental. Dapat dilihat bahwa, pada hipergrup, β^* bersifat transitif pada β. Pada (Freni, 2002), Freni membuktikan bahwa β bersifat transitif pada hipergrup.

HIPERGRUP DAN JENIS-JENIS SUBHIPERGRUP

Seorang matematikawan muda Prancis, F. Marty (1911-1940), selama Kongres Matematikawan Skandinavia ke-8, yang diadakan di Stockholm pada tahun 1934, memperkenalkan struktur aljabar dimana hasil operasi dari dua elemen adalah suatu himpunan, bukan satu elemen. Dia menyebut struktur ini hipergrup. Marty tutup usia pada usia 29 tahun, saat Perang Dunia II. Warisan matematikanya tentang hipergrup hanya tiga makalah. Namun, matematikawan lain seperti M. Krasner, J. Kuntzmann, H. Wall, O. Ore, M. Dresher , E.J. Eaton , dan L. W. Griffiths secara bertahap mulai menekuni hipergrup sesudahnya, Dari sini muncullah istilah hiperoperasi yang dikenakan pada suatu struktur aljabar. Lebih jelasnya berikut diberikan definisi hipergrup.

Definisi 2.1 (Davvaz, 2013). Diberikan himpunan tak kosong H dan $P^*(H) = \{A \subseteq H \mid A \neq \emptyset\}$. Suatu pemetaan

$$\circ: H \times H \to P^*(H)$$

dinamakan hiperoperasi pada himpunan H. Dalam hal ini himpunan H beserta operasi $\circ$ ditulis $(H,\circ)$ dinamakan hipergrupoid.

Definisi 2.2 (Davvaz, 2013). Suatu hipergrupoid $(H,\circ)$ dinamakan suatu semihipergrup bila berlaku

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \text{untuk semua } a, b, c \in H$$

yang berarti bahwa

$$\bigcup_{u\in a\circ b} u \circ c = \bigcup_{v\in b\circ c} a \circ v$$

dalam hal ini, bila $A, B \subseteq H$, maka

$$A \circ B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a \circ b$$

dan untuk $x \in H$,

$$x \circ A = \{x\} \circ A \; dan \; B \circ x = B \circ \{x\}$$

Suatu semihipergrup $(H,\circ)$ adalah berhingga bila H merupakan himpunan berhingga dan dikatakan kumutatif bila memenuhi

$$x \circ y = y \circ x, untuk \; semua \; x, y \in H.$$

Contoh 1.

Misalkan $H = \{a, b, c\}$. Didefinisikan hiperoperasi $\circ$ pada H melalui Tabel 1, berikut

Tabel 1. Hiperoperasi $\circ$ pada H

$\circ$	a	b	c
a	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$
b	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
c	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$

Maka $(H,\circ)$ adalah semi hipergrup.

Definisi 2.3 (Davvaz, 2013). Suatu hipergrupoid $(H,\circ)$ dinamakan suatu kuasi hipergrup bila berlaku $a * H = H = H * a$ untuk semua $a \in H$.

Tabel 2. Kuasi Hipergrup

$*$	1	2	3
1	{1,3}	{3}	{2}
2	{2}	{1,2,3}	{2}
3	{2}	{1}	{1,2,3}

Definisi 2.4 (Davvaz, 2013). Suatu hipergrupoid $(H,\circ)$ yang merupakan semihipergrup dan kuasi hipergrup dinamakan hipergrup.

Diberikan dua contoh dari hipergrup.

Contoh 2.
Misalkan $H = \{e, a, b\}$. Didefinisikan hiperoperasi $(H,\circ)$ pada H melalui tabel berikut:

Tabel 3. Contoh Hipergrup

$\circ$	e	a	b
e	$\{e, a\}$	H	H
a	H	$\{e, a\}$	$\{e, a\}$
b	H	$\{e, a\}$	$\{e, a\}$

Contoh 3. 3
Bila $H \neq \emptyset$ dan untuk sebarang $x, y \in H$ didefinisikan $x \circ y = H$. Maka $(H,\circ)$ adalah suatu hipergrup yang dinamakan total hipergrup.

Definisi 2.5 (Davvaz, 2013). Misalkan $(H,\circ)$ adalah suatu hipergrup. Suatu himpunan bagian tak kosong K dari H dinamakan subhipergrup bila $(K,\circ)$ adalah hipergrup**.**

Dengan demikian, suatu himpunan bagian tak-kosong K dari H dengan $(H,\circ)$ adalah suatu subhipergrup bila dan hanya bila untuk semua $a \in K$, maka $a \circ K = K \circ a = K$.

Lemma 2.1 Irisan dari sebarang dua hipergrup bukanlah hipergrup

Bukti: Dikarenakan jika ada x, y yang memenuhi $a \in b \circ x$ dan $a \in y \circ b$, untuk setiap a, b berada di irisan dua hipergrup, maka x dan y tidak selalu berada di irisan dua hipergrup tersebut.

Contoh 4.

Irisan dari dua subhipergrup adalah himpunan kosong yang jelas bukan merupakan subhipergrup.

Definisi 2.6 (Davvaz, 2013). Misalkan $(H,\circ)$ adalah suatu hipergrup dan $(K,\circ)$ adalah suatu subhipergrup. Dikatakan bahwa K adalah

- Tertutup di kiri (di kanan) bila untuk semua $k_1, k_2 \in K$ dan $x \in H$, bila $k_1 \in x \circ k_2$ $(k_1 \in k_2 \circ x)$, maka $x \in K$;
- Punya invers kiri (punya invers kanan), bila untuk semua $x, y \in H$, bila $x \in K \circ y$ $(x \in y \circ K)$, maka $y \in K \circ x$ $(y \in x \circ K)$;
- Tertutup-ultra di kiri (di kanan) bila untuk semua $x \in H$ berlaku $K \circ x \cap (H \setminus K) \circ x = \emptyset$ $(x \circ K \cap x \circ (H \setminus K) = \emptyset)$;
- Berkonjugasi di kanan bila K tertutup di kanan dan untuk semua $x \in H$ ada $x' \in H$ yang memenuhi $x' \circ x \subseteq K$.

Dikatakan bahwa K tertutup (punya invers, tertutup-ultra, berkonjugasi) bila K tertutup (punya invers, tertutup-ultra, berkonjugasi) di kiri dan di kanan.

Lemma 2.2 (Davvaz, 2013). Bila suatu subhipergrup K dari suatu hipergrup $(H,\circ)$ adalah tertutup-ultra, maka ia tertutup dan punya invers.

Lemma 2.3 (Davvaz, 2013). Bila suatu subhipergrup K dari suatu hipergrup $(H,\circ)$ punya invers, maka ia tertutup.

Lemma 2.4 (Davvaz, 2013). Bila suatu subhipergrup K dari suatu hipergrup $(H,\circ)$ berkonjugasi, maka ia tertutup-ultra.

KOMPUTASI HIPERGRUP

Pada bab ini akan diberikan aplikasi program yang komprehensif menggunakan Java untuk mengkomputasikan grup fundamental dari suatu hipergrup berhingga. Program ini juga mengkonstruksi seluruh hipergrup yang berkardinalitas $n \leq 3$ $(n \in N)$. Program ini terdiri dari dua sub-program. Pada sub-program, generator hipergrup mengkonstruksi semua hipergrup dengan kardinalitas $n \leq 3$ $(n \in N)$ dan kelas-kelas yang memuat isomorfisma di dalamnya. Sub-program ini juga mengenumerasi kuasi hipergrup dengan kardinalitas n dan seluruh kelas ekivalen β. Program tersebut dikaji dari paper (Karim Abbasi, 2018).

Seperti yang kita ketahui, hanya terdapat satu grup dengan kardinalitas tiga, sedangkan terdapat 3999 hipergrup yang isomorfis. Lebih lengkapnya, program tersebut menghasilkan 7^9 hiperstuktur. Ditemukan 10323979 kuasi hipergrup, 23192 hipergrup dan 3999 hipergrup yang isomorfisma. Lebih jauh, diperoleh grup fundamental dari hipergrup di atas sebagai berikut:

Satu grup isomorfis dengan Z_3 sembilan isomorfs dengan Z_2 dan sisanya adalah grup trivial.

Contoh berikut adalah Tabel untuk suatu hipergrupoid H_1 dan H_2 dengan kardinalitas tiga:

∘	1	2	3
1	{1}	{2,3}	{1}
2	{2,3}	{1}	{2,3}
3	{1}	{2,3}	{1}

.

$*$	1	2	3
1	{1,3}	{3}	{2}
2	{2}	{1,2,3}	{2}
3	{2}	{1}	{1,2,3}

$(H_1,\circ)$ adalah suatu hipergrup dengan kelas ekivalen sebagai berikut :

$$\beta(1) = \{1\}, \beta(2) = \{2,3\}$$

Dan $(H_1/\beta^*,\ \otimes) = Z_2$, Sedangkan $(H_2,*)$ bukan suatu hipergrup tetapi suatu kuasi hipergrup.

Sekarang kita observasi beberapa contoh dari hipergrup menggunakan subprogram, progam utama dan menghasilkan:

Tinjau dua hiperstuktur $(H_1,\circ)$ dan $(H_2,*)$ berturut-turut dengan kardinalitas empat pada table berikut:.

,∘	1	2	3	4
1	{1,2}	{1,2}	{3,4}	{3,4}
2	{1,2}	{1,2}	{3,4}	{3,4}
3	{3,4}	{3,4}	{1}	{2}
4	{3,4}	{3,4}	{2}	{1}

*	1	2	3	4
1	{1}	{2,3}	{2,3}	{4}
2	{2,3}	{4}	{4}	{1}
3	{2,3}	{4}	{4}	{1}
4	{4}	{1}	{1}	{2,3}

$(H_1,\circ)$ adalah hipergrup dengan kelas ekivalen sebagai berikut :

$$\beta(1) = \{1,2\}, \qquad \beta(3) = \{3,4\}$$

Maka $((H_1/\beta^*,\ \otimes) = Z_2$. Sedangkan $(H_2,*)$ adalah hipergrup dengan relasi ekivalen sebagai berikut

$$\beta(1) = \{1\}, \beta(2) = \{2,3\}, \beta(4) = \{4\}.$$

Maka $(H_2/\beta^*,\ \otimes) = Z_3$.

KESIMPULAN

Pertama diperoleh bahwa tidak seperti grup, irisan dari dua subhipergrup belum tentu merupakan subhipergrup juga. Selain itu juga diperoleh dua algoritma untuk mengkomputasi grup fundamental dari hipergrup berhingga yang diberikan. Satu Dari algoritma ini menghasilkan semua hipergrup kurang dari atau sama dengan 3 dan algoritma lain dapat pertama-tama periksa apakah hiperstruktur yang diberikan adalah hipergrup atau tidak dan mengkomputasi grup fundamental yang berasal dari hipergrup melalui relasi fundamental.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bijan Davvaz, Polygroup and Related System, World Scientific, 2013.

[2]. Karim Abbasi, et all, Computation of Fundamental Group of a Finite Hypergroup, Sigma J. Eng and Nat Sci 9, 107-125, 2018.

[3]. F. Marty, Sur une generalization de la notion de groupe, in: 8th, Congress Math. Scandinaves, Stockholm, Sweden, 45-49, 1934.

[4]. D. Freni, A new characterization of the derived hypergroup via strongly regular equivalences, Communication in algebra 30(8), 3977-3989., 2002.