

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI LOKASI PADA GRAF KEMUDI DAN GRAF JARING

Rauman Mahmud^{*1}, Ariestha Widyastuty Bustan²

^{1,2}Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pasifik Morotai
Morotai Selatan, Pulau Morotai, Maluku Utara, Indonesia

Submitted: March 3, 2025

Revised: April 23, 2025

Accepted: May 28, 2025

**Corresponding author. Email: raumanmahmud1@gmail.com*

Abstrak

Konsep bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf merupakan salah satu inovasi dalam teori pewarnaan graf yang menggabungkan konsep pewarnaan titik pelangi dan dimensi partisi pada graf. Konsep ini bertujuan untuk menentukan bilangan bulat positif terkecil k sehingga terdapat pewarnaan- k pelangi lokasi pada graf yang memungkinkan setiap titik memiliki kode pelangi yang unik. Dalam penelitian ini, kami mengkaji bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf kemudi dan graf jaring. Hasil dari kedua graf menunjukkan bahwa jumlah titik pemotong berbanding lurus dengan bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf kemudi dan graf jaring.

Kata Kunci: Bilangan terhubung pelangi Lokasi; Graf jaring; Graf kemudi, Kode pelangi, pewarnaan pelangi lokasi.

Abstract

The concept of the locating rainbow connection number of a graph is an innovation in graph coloring theory that combines the concepts of rainbow vertex coloring and partition dimension on graphs. This concept aims to determine the smallest positive integer k such that there exists a location rainbow k -coloring on the graph, ensuring that every vertex has a unique rainbow code. In this study, we investigate the locating rainbow connection number of helm graph and web graph. The results of both graphs show that the number of intersection points is directly proportional to the rainbow connection number of the helm graph and the web graph.

Keywords: Helm graph, Locating rainbow coloring, Locating rainbow connection number, Rainbow code, Web graph

1. Pendahuluan

Konsep bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf adalah konsep baru dalam teori pewarnaan graf yang diperkenalkan oleh Bustan et al., (2021). Konsep ini merupakan kombinasi antara konsep pewarnaan titik pelangi dan konsep dimensi partisi pada graf. Konsep pewarnaan titik pelangi adalah konsep mewarnai titik pada graf yang mengharuskan untuk setiap dua titik berbeda di suatu graf dihubungkan oleh lintasan titik pelangi (Krivelevich & Yuster, 2010). Beberapa hasil yang berkaitan dengan konsep pewarnaan titik pelangi dapat dilihat pada Simamora & Salman (2015), Bustan & Salman (2018) dan Bustan & Salman (2019). Sementara itu, konsep dimensi partisi merupakan konsep pada graf yang berkaitan dengan ukuran minimum dari partisi himpunan titik graf sedemikian rupa sehingga setiap titik dapat diidentifikasi secara unik berdasarkan vektor jaraknya ke setiap bagian dalam partisi tersebut (Chartrand, et al, 2008).

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf sederhana, berhingga, dan terhubung serta k adalah suatu bilangan bulat positif, pewarnaan- k titik pelangi pada G adalah suatu pemetaan $c : V(G) \rightarrow [1, k]$ sehingga untuk setiap dua titik berbeda u dan v di G terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya dengan titik-titik internalnya berwarna berbeda. Suatu lintasan P pada G yang titik-titik internalnya berbeda warna dikatakan sebagai lintasan titik pelangi. Bilangan terhubung titik pelangi graf G , dinotasikan dengan $rvcl(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga terdapat pewarnaan- k titik pelangi pada G . Untuk $i \in [1, k]$, misalkan R_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i dan $\Pi = R_1, R_2, \dots, R_k$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Kode pelangi titik $v \in V(G)$ terkait Π , dinotasikan dengan $rc_\Pi(v)$, adalah tupel- k terurut yang didefinisikan sebagai $rc_\Pi(v) = (d(v, R_1), d(v, R_2), \dots, d(v, R_k))$ dengan $d(v, R_i) = \{\min d(v, y) | y \in R_i\}$ untuk setiap $i \in [1, k]$. Jika setiap titik di G memiliki kode pelangi yang berbeda, maka pewarnaan c disebut pewarnaan k pelangi lokasi pada G . Bilangan terhubung pelangi lokasi graf G , dinotasikan dengan $rvcl(G)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil k sehingga terdapat suatu pewarnaan- k pelangi lokasi pada G . Hasil-hasil yang berkaitan dengan bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf dapat dilihat dalam Bustan et al (2023) dan Bustan et al (2025).

Berikut ini adalah beberapa hasil penelitian terdahulu terkait bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf yang diperlukan dalam pembuktian hasil penelitian ini.

Lema 1 (Bustan et al., 2021) Misalkan m merupakan suatu bilangan bulat positif dengan $m \geq 3$. Jika G merupakan graf terhubung berorde m , maka $2 \leq rvcl(G) \leq m$.

Lema 2 (Bustan et al., 2021) Misalkan c merupakan suatu pewarnaan pelangi lokasi dari G dan u dan v merupakan dua titik berbeda di G . Jika $d(u, x) = d(v, x)$ untuk $x \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Lema 3 (Imrona et al., 2021) Jika p adalah banyaknya titik pemotong pada suatu graf G , maka $rvcl(G) \geq p$.

Seperti yang dinyatakan pada Lema 1.3 bahwa banyaknya titik pemotong pada suatu graf dapat dijadikan sebagai salah satu tinjauan dalam membuktikan batas bawah dari bilangan terhubung pelangi lokasi suatu graf. Oleh karena itu, pada penelitian ini kami akan mengeksplorasi bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf yang memuat titik pemotong, yaitu graf kemudi dan graf jaring. Graf kemudi berorde $m \geq 3$, dinotasikan dengan H_m , adalah graf yang diperoleh dari graf roda berorde dengan menambahkan sebuah sisi daun dari setiap titik dari lingkaran (Weisstein, 2007). Selanjutnya sebelum mendefinisikan graf jaring terlebih dahulu diberikan definisi terkait graf prisma bertumpuk. Graf prisma bertumpuk, $Y_{m,n}$, adalah graf sederhana yang dibentuk melalui hasil perkalian kartesius antara sebuah graf siklus C_m dan graf lintasan P_n , dengan m dan n adalah bilangan bulat positif dengan $m, n \geq 3$ (Gallian, 2007). Graf jaring (*web graph*), sebagaimana didefinisikan oleh Koh et al. (1980) dan Gallian (2007), adalah graf $Y_{m+1,3}$ dengan sisi-sisi dari siklus terluar dihilangkan.

2. Metode Penelitian

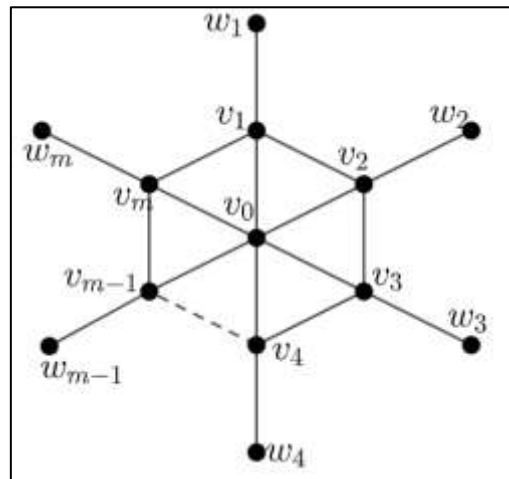
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur dengan tahapan penelitian sebagai berikut: (1) Studi literatur: mengkaji fakta, observasi, lema ataupun teorema yang berkaitan dengan konsep bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf dan karakteristik pada graf kemudi dan graf jaring. Selain itu, juga dilakukan pengkajian terhadap metode pembuktian yang tepat untuk lema dan teorema yang akan dibuktikan. (2) Membuat hipotesis: dirumuskan hipotesis yang berkaitan dengan nilai dari bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf kemudi dan graf jaring yang dirumuskan dalam suatu teorema ataupun lema. (3) Pembuktian teorema: Pada tahapan ini dilakukan pembuktian terhadap bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf kemudi dan graf jaring. (4) Penarikan kesimpulan: Hipotesis yang berhasil dibuktikan dirumuskan dalam suatu teorema.

3. Hasil dan Pembahasan

Didefinisikan $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$ untuk memudahkan penulisan. Hasil utama dalam penelitian ini terbagi menjadi dua subbab, yaitu subbab 3.1 yang membahas tentang bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf kemudi dan subbab 3.2 tentang bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf jaring.

3.1 Bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf kemudi

Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf kemudi secara berturut-turut sebagai berikut: $V(H_m) = \{v_i \mid i \in [0, m]\} \cup \{w_i \mid i \in [1, m]\}$ dan $E(H_m) = \{v_i v_{i+1} \mid i \in [1, m-1]\} \cup \{v_m v_1\} \cup \{v_i v_0 \mid i \in [1, m]\} \cup \{v_i w_i \mid i \in [1, m]\}$ (lihat Gambar 1 untuk ilustrasi). Graf kemudi H_m memiliki jumlah titik sebanyak $2m + 1$ dan jumlah sisi sebanyak $3m$.



Gambar 1. Graf H_m

Teorema 1. Misalkan m merupakan bilangan asli dengan $m \geq 3$. Jika $H(m)$ merupakan graf kemudi berorde $2m + 1$, maka

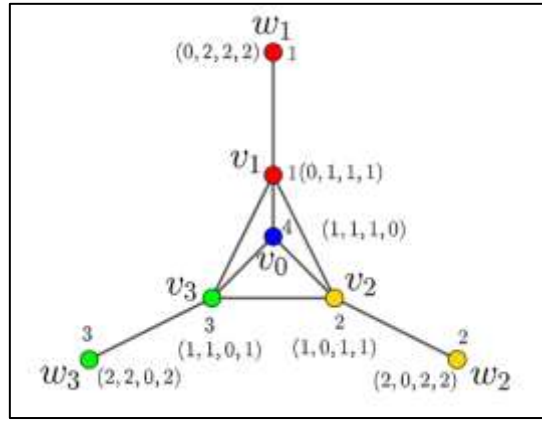
$$rvcl(H_m) = \begin{cases} m + 1, & \text{untuk } m = 3 \\ m, & \text{untuk } m \geq 4 \end{cases}.$$

Bukti.

Pembuktian terbagi menjadi dua kasus sebagai berikut.

Kasus 1. $m = 3$

Berdasarkan Lemma 1.1 dan Gambar 2 diperoleh $rvcl(H_3) = 4$.



Gambar 2. Suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf H_3

Kasus 2. $m \geq 4$

Diketahui graf H_m memiliki m titik pemotong, sehingga berdasarkan Lema 1.3 diperoleh $rvcl(H_m) \geq m$. Selanjutnya ditunjukkan $rvcl(H_m) \leq m$ dengan mendefinisikan suatu pewarnaan titik dengan $c: V(H_m) \rightarrow [1, m]$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(v_0) &= 1; \\ c(v_i) &= i \text{ untuk } i \in [1, m]; \\ c(w_i) &= i \text{ untuk } i \in [1, m]. \end{aligned}$$

Perhatikan tabel lintasan- $x - y$ titik pelangi berikut ini.

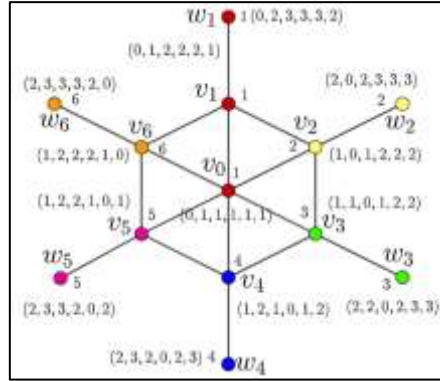
Tabel 1. Lintasan- $x - y$ titik pelangi			
x	y	Keterangan	Lintasan- $x - y$ titik pelangi
v_i	v_j	$i, j \in [1, m], i \neq j$	$v_i v_0 v_j$
v_0	v_j	$j \in [1, m]$	$v_0 v_j$
v_0	w_j	$j \in [2, m]$	$v_0 v_j w_j$
v_i	w_j	$i, j \in [1, m], i = j$	$v_i w_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, j < i$	$v_i v_{i-1} v_{i-2} \dots v_j w_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, j > i$	$v_i v_{i+1} v_{i+2} \dots v_j w_j$
w_i	w_1	$i \in [2, m]$	$w_i v_i v_{i-1} v_{i-2} v_{i-3} \dots v_2 v_1 w_1$
w_i	w_j	$i, j \in [2, m]$	$w_i v_i v_0 v_j w_j$

Berdasarkan tabel di atas diperoleh setiap sebarang dua titik berbeda di H_m selalu terdapat lintasan titik pelangi yang menghubungkannya. Selanjutnya perhatikan fakta-fakta yang berkaitan dengan kode pelangi yang diakibatkan pewarnaan titik di atas.

1. $c(v_i) \neq c(v_j)$ untuk $i, j \in [1, m], i \neq j$, sehingga $rc_{\Pi}(v_i) \neq rc_{\Pi}(v_j)$.
2. $c(w_i) \neq c(w_j)$ untuk $i, j \in [1, m], i \neq j$, sehingga $rc_{\Pi}(w_i) \neq rc_{\Pi}(w_j)$.
3. Warna 1 hanya digunakan di titik v_0, v_1 , dan w_1 . Sementara itu, $d(v_0, R_i) = 1$ untuk $i \in [2, m]$, $d(v_1, R_i) = 2$ untuk $i \in [3, m-1]$, dan $d(w_i, R_i) = 3$ untuk $i \in [3, m-1]$. Oleh karena itu, titik v_0, v_1 , dan w_1 tidak memiliki kode pelangi yang sama.
4. Setiap warna selain warna 1 hanya digunakan pada dua titik, di mana $c(v_i) = c(w_i)$ untuk $i \in [2, m]$. Di sisi lain, $d(v_i, R_1) = 1$ sedangkan $d(w_i, R_1) = 2$. Oleh karena itu, $rc_{\Pi}(v_i) \neq rc_{\Pi}(w_i)$.

Poin 1-4 menunjukkan bahwa setiap titik pada graf H_m memiliki kode pelangi yang berbeda. Oleh karena itu, berdasarkan bukti keterhubungan titik pelangi pada graf dan kondisi kode pelangi pada graf H_m , maka $rvcl(H_m) = m$ untuk $m \geq 4$. ■

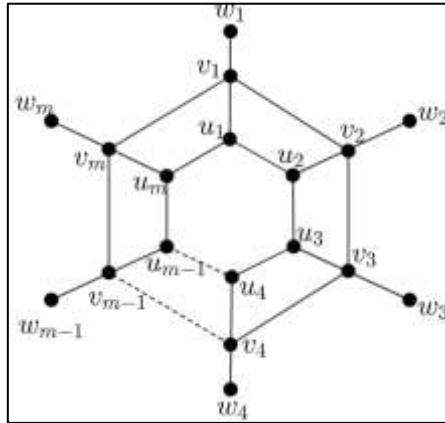
Gambar 3 mengilustrasikan suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf H_6 .



Gambar 3. Suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf H_6

3.2 Bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf jaring

Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf jaring didefinisikan sebagai berikut: $V(W_m) = \{u_i | i \in [1, m]\} \cup \{v_i | i \in [1, m]\} \cup \{w_i | i \in [1, m]\}$ dan $E(W_m) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1, m-1]\} \cup \{u_m u_1\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in [1, m-1]\} \cup \{v_m v_1\} \cup \{u_i v_i | i \in [1, m]\} \cup \{v_i w_i | i \in [1, m]\}$ (lihat Gambar 4 untuk ilustrasi). Graf jaring W_m memiliki jumlah titik dan sisi masing-masing sebanyak $3m$.

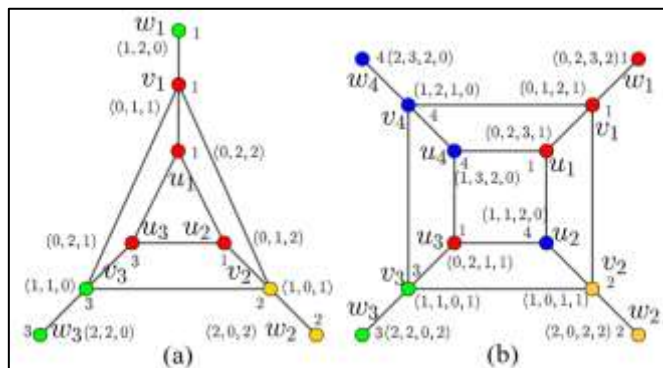


Gambar 4. Graf W_m

Teorema 2 Misalkan m dan n adalah bilangan asli dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 1$. Jika W_m adalah graf jaring berorde $3m$, maka

$$rvcl(W_m) = m$$

Bukti.



Gambar 5. Suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf (a) W_3 dan (b) W_4

Diketahui graf W_m memiliki m titik pemotong, sehingga berdasarkan Lema 1.3 diperoleh $rvcl(W_m) \geq m$. Selanjutnya ditunjukkan $rvcl(W_m) \leq m$. Untuk $m = 3, 4$, telah diberikan suatu pewarnaan pelangi lokasi seperti yang ditunjukkan pada **Gambar 5**. Sedangkan untuk $m \geq 5$ ditunjukkan dengan mendefinisikan suatu pewarnaan titik dengan $c: V(W_m) \rightarrow [1, m]$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(v_i) &= i \text{ untuk } i \in [1, m]; \\ c(w_i) &= c(v_i) \text{ untuk } i \in [1, m]; \\ c(u_i) &= \begin{cases} m-1, & \text{untuk } i = 1; \\ m, & \text{untuk } i = 2; \\ i-2, & \text{untuk } i \in [1, m-3]. \end{cases} \end{aligned}$$

Perhatikan tabel lintasan- $x - y$ titik pelangi berikut ini.

Tabel 2. Lintasan- $x - y$ titik pelangi			
x	y	Keterangan	Lintasan- $x - y$ titik pelangi
u_i	u_j	$i, j \in [1, m], i \neq j, i > j$	$u_i u_{i-1} u_{i-2} u_{i-3} \dots u_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i < j$	$u_i u_{i+1} u_{i+2} u_{i+3} \dots u_j$
v_i	v_j	$i, j \in [1, m], i \neq j, i > j$	$v_i v_{i-1} v_{i-2} v_{i-3} \dots v_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i < j$	$v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} \dots v_j$
w_i	w_j	$i, j \in [1, m], i \neq j, i > j$	$w_i v_i v_{i-1} v_{i-2} v_{i-3} \dots v_j w_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i < j$	$w_i v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} \dots v_j w_j$
u_i	v_j	$i, j \in [1, m], i = j$	$u_i v_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i > j$	$u_i u_{i-1} u_{i-2} u_{i-3} \dots u_j v_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i < j$	$u_i u_{i+1} u_{i+2} u_{i+3} \dots u_j v_j$
u_i	w_j	$i, j \in [1, m], i = j$	$u_i v_i w_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i > j$	$u_i u_{i-1} u_{i-2} u_{i-3} \dots u_j v_j w_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i < j$	$u_i u_{i+1} u_{i+2} u_{i+3} \dots u_j v_j w_j$
v_i	w_j	$i, j \in [1, m], i = j$	$v_i w_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i > j$	$v_i v_{i-1} v_{i-2} v_{i-3} \dots v_j w_j$
		$i, j \in [1, m], i \neq j, i < j$	$v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} \dots v_j w_j$

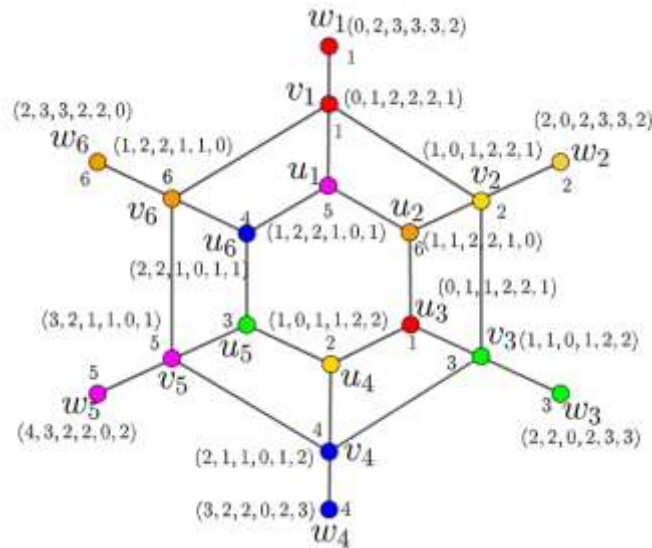
Berdasarkan tabel di atas diketahui selalu terdapat lintasan titik pelangi yang menghubungkan sebarang dua titik berbeda di W_m . Selanjutnya perhatikan fakta-fakta yang berkaitan dengan kode pelangi yang diakibatkan pewarnaan titik di atas.

1. $c(u_i) \neq c(u_j)$ untuk $i, j \in [1, m], i \neq j$, sehingga $rc_{\Pi}(u_i) \neq rc_{\Pi}(u_j)$.
2. $c(v_i) \neq c(v_j)$ untuk $i, j \in [1, m], i \neq j$, sehingga $rc_{\Pi}(v_i) \neq rc_{\Pi}(v_j)$.
3. $c(w_i) \neq c(w_j)$ untuk $i, j \in [1, m], i \neq j$, sehingga $rc_{\Pi}(w_i) \neq rc_{\Pi}(w_j)$.
4. Setiap warna hanya digunakan sebanyak tiga kali sebagai berikut.
 - a. $c(u_1) = c(v_{m-1}) = c(w_{m-1}) = m-1$. Sementara itu $d(u_1, R_1) = 1$, $d(v_{m-1}, R_1) \neq 1$, $d(w_{m-1}, R_1) \neq 1$, dan $d(v_{m-1}, R_1) < d(w_{m-1}, R_1)$, sehingga $rc_{\Pi}(u_1) \neq rc_{\Pi}(v_{m-1}) \neq rc_{\Pi}(w_{m-1})$.
 - b. $c(u_2) = c(v_m) = c(w_m) = m$. Sementara itu, $d(u_2, R_2) = 1$, $d(v_m, R_2) \neq 1$, $d(w_m, R_2) \neq 1$, dan $d(v_m, R_1) < d(w_m, R_1)$, sehingga $rc_{\Pi}(u_2) \neq rc_{\Pi}(v_m) \neq rc_{\Pi}(w_m)$.
 - c. $c(u_{i+2}) = c(v_i) = c(w_i)$ untuk $i \in [1, m-2]$. Titik w_i tidak pernah berjarak satu dengan R_i untuk $i \in [1, m]$, sebaliknya untuk u_{i+2} dan v_i , terdapat setidaknya warna w dan x sehingga $d(u_{i+2}, R_w) = 1$ dan $d(v_i, R_x) = 1$, sehingga titik w_i memiliki kode pelangi yang berbeda dengan u_{i+2} dan v_i . Selanjutnya diketahui

$d(u_{i+2}, R_{i+4}) = 1$ sedangkan $d(v_i, R_{i+4}) \neq 1$. Oleh karena itu, $rc_{\Pi}(u_{i+2}) \neq rc_{\Pi}(v_i) \neq rc_{\Pi}(w_i)$.

Poin 1-3 menunjukkan bahwa setiap titik pada graf W_m memiliki kode pelangi yang berbeda. Oleh karena itu, berdasarkan bukti keterhubungan titik pelangi pada graf dan kondisi kode pelangi pada graf W_m , maka $rvcl(W_m) = m$ untuk $m \geq 3$. ■

Gambar 6 mengulustrasikan suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf W_6 .



Gambar 6. Suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf W_6

4. Kesimpulan

Hasil yang diperoleh dari kedua jenis graf menunjukkan bahwa jumlah titik pemotong berbanding lurus dengan bilangan terhubung pelangi pada graf kemudi dan graf jaring.

Daftar Pustaka

- Bustan, A. W., & Salman, A. N. M. (2018). The rainbow vertex-connection number of star fan graphs. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 5(3), 112-116.
- Bustan, A. W., & Salman, A. N. M. (2019, December). The rainbow vertex connection number of star wheel graphs. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2202, No. 1). AIP Publishing.
- Bustan, A. W., Salman, A. N. M., & Putri, P. E. (2021, February). On the locating rainbow connection number of a graph. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1764, No. 1, p. 012057). IOP Publishing.
- Bustan, A. W., Salman, A. N. M., & Putri, P. E. (2023, July). On the locating rainbow connection number of amalgamation of complete graphs. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2543, No. 1, p. 012004). IOP Publishing.
- Bustan, A. W., Salman, A. N. M., & Putri, P. E. (2025). Determining the locating rainbow connection numbers of vertex-transitive graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, (), -. doi: 10.22049/cco.2025.29742.2137
- Bustan, A. W., Salman, A. N. M., Putri, P. E., & Awanis, Z. Y. (2023). On the Locating Rainbow Connection Number of Trees and Regular Bipartite Graphs. *Emerging Science Journal*, 7(4), 1260-1273.
- Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., & Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica bohemia*, 133(1), 85-98.
- Gallian, J. A. (2022). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of combinatorics*, 6(25), 4-623.

- Imrona, M., Salman, A. N. M., Uttunggadewa, S., & Putri, P. E. (2021, March). On the Locating Rainbow Connection Number of the Comb Product with Complete Graphs or Trees. In *Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing* (pp. 203-214). Cham: Springer International Publishing.
- Koh, K. M., Rogers, D. G., Teo, H. K., & Yap, K. Y. (1980). Graceful graphs: some further results and problems. *Congr. Numer*, 29, 559-571.
- Krivelevich, M., & Yuster, R. (2010). The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. *Journal of Graph Theory*, 63(3), 185-191.
- Simamora, D. N., & Salman, A. N. M. (2015). The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs. *Procedia Computer Science*, 74, 138-142.
- Weisstein, E. W. (2007). Helm Graph. <https://mathworld.wolfram.com/>.