ENDOMORFISMA PADA SEMIGRUP PERKALIAN DARI MATRIKS ATAS LAPANGAN

Lisanatun Kasanah, I Made Sulandra

Jurusan Matematika, Universitas Negeri Malang, Jalan Semarang 5 Malang
e-mail: lisanatunkhasanah@yahoo.co.id; imade_sulandra@yahoo.com

Abstrak

Misalkan F adalah suatu lapangan, $n \in \mathbb{Z}$ dengan $n \geq 3$, dan $M_n(F)$ adalah himpunan matriks berukuran $n \times n$ atas F. $M_n(F)$ dilengkapi dengan operasi kali (baku) dari matriks membentuk suatu semigrup, yaitu himpunan tidak kosong dengan satu operasi biner yang asosiatif. Suatu pemetaan $f: M_n(F) \to M_n(F)$ disebut endomorfisma jika untuk setiap A dan B di $M_n(F)$ berlaku $f(AB) = f(A)f(B)$. Pada artikel ini akan dikaji beberapa pemetaan yang merupakan endomorfisma pada semigrup perkalian dari matriks atas lapangan. Dalam pembuktian endomorfisma semigrup tersebut disusun juga beberapa lemma pendukung beserta pembuktiannya.

Kata Kunci: homomorfisma, endomorfisma, semigrup perkalian matriks, lapangan..

ENDOMORPHISMS ON MULTIPLICATIVE SEMIGROUPS OF MATRICES OVER FIELDS

Abstract

Let $\boldsymbol{F}$ be a field, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ with $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}$, and $\boldsymbol{M_n(F)}$ be the set of $\boldsymbol{n \times n}$ matrices over $\boldsymbol{F}$. The set $\boldsymbol{M_n(F)}$ with respect to an associative multiplication operation can forms a semigroup. A map $\boldsymbol{f: M_n(F) \to M_n(F)}$ is called a semigroup endomorphism if for each $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ in $\boldsymbol{M_n(F)}$ implies $\boldsymbol{f(AB) = f(A)f(B)}$. In this article, we discuss several mappings which are endomorphisms on multiplicative semigroups of matrices over fields. In proving the semigroup endomorphism prepared also some proof of its supporting lemma.

Keywords: homomorphism, endomorphism, multiplicative semigroup of matrices, fields.

1. Pendahuluan

Himpunan dan operasi merupakan obyek utama dalam bidang aljabar yang digunakan untuk mendefinisikan obyek-obyek lain seperti semigrup, grup, gelanggang, lapangan, dan sebagainya. Semigrup merupakan salah satu obyek matematika pada bidang aljabar. Menurut Hungerford (1974), semigrup merupakan himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner yang memenuhi sifat asosiatif. Kemudian semigrup dengan tambahan sifat yaitu memiliki elemen identitas dan masing-masing elemennya memiliki invers membentuk suatu grup (Hungerford, 1974). Contoh dari grup yang sudah sering dikenal adalah himpunan bilangan bulat dan himpunan bilangan real dengan operasi tambah (baku). Suatu grup dengan operasi tambah yang bersifat komutatif disebut grup Abel. Grup Abel dengan tambahan operasi kali yang memenuhi dua sifat, yaitu asosiatif dan distributif (kanan dan kiri) terhadap perkalian disebut gelanggang (Gallian, 2010). Gelanggang dengan beberapa tambahan sifat tertentu dapat membentuk daerah integral, lapangan, dan sebagainya. Menurut Gallian (2010), lapangan merupakan gelanggang komutatif dengan satuan dan setiap elemen tidak nol nya adalah unit (mempunyai invers di bawah operasi kali).

Dalam aljabar, himpunan matriks dapat membentuk suatu grup (semigrup). Himpunan matriks yang entri-entrinya merupakan elemen dari lapangan dapat membentuk semigrup di bawah operasi kali (baku) dari matriks. Pasangan-pasangan semigrup perkalian dari matriks dapat memiliki suatu relasi, seperti saling homomorfis atau isomorfis. Menurut Hungerford (1974), misalkan G, H adalah semigrup dari matriks dan fungsi f memetakan G ke H, f disebut homomorfisma jika untuk setiap A dan B elemen di G maka berlaku $f(AB) = f(A)f(B)$ (sifat seperti ini disebut mengawetkan operasi). Kemudian jika fungsi f memetakan grup G ke G ($H = G$), maka f disebut endomorfisma.

Pada penelitian sebelumnya, Jodeit dan Lam (1969) menentukan bentuk umum dari semua homomorfisma *non-degenerate* $\phi : M_n^k(F) \to M_n(F), \forall k \in \langle n \rangle$ dengan F adalah lapangan, $M_n(F)$ merupakan semigrup dari matriks berukuran $n \times n$ atas F, $M_n^k(F)$ adalah subsemigrup dari $M_n(F)$ yang terdiri dari semua matriks dengan rank paling banyak k, dan $\langle n \rangle = \{1,2,\dots,n\}$. Fungsi ϕ dikatakan *non-degenerate* jika $\phi(A) \neq 0$ untuk suatu matriks singular $A \in M_n^k(F)$. Kemudian Hochwald (1994) mendeskripsikan struktur dari semua homomorfisma dari $\mathcal{P}$ ke $M_n(F)$ yang mengawetkan spektrum, dimana $\mathcal{P}$ adalah subsemigrup dari $M_n(F)$ yang memuat $M_n^0(F)$. Selain itu, Xian dan Chongguang (2001) dalam artikelnya yang berjudul "*Homomorphisms between Matrix Multiplicative Semigroups*" menggeneralisasi hasil dari Hochwald tanpa asumsi mengawetkan spektrum.

Berdasarkan uraian tersebut, pada artikel ini akan dikaji beberapa pemetaan dari $M_n(F)$ ke $M_n(F)$ yang merupakan endomorfisma semigrup. Ide penulisan ini diperoleh dari artikel "*Homomorphisms between Multiplicative Semigroups of Matrices over Fields*" (Xian dan Chongguang, 2008).

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Semigrup, Monoid, dan Grup

Menurut Hungerford (1974), suatu *semigrup* adalah himpunan tidak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner pada G yang bersifat asosiatif, yaitu

$$a(bc) = (ab)c, \ \ \forall a,b,c \in G.$$

Semigrup G yang memuat suatu elemen identitas (dua sisi) $e \in G$ sedemikian sehingga $ae = ea = a, \forall a \in G$ disebut *monoid*. Monoid G sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$, ada suatu elemen invers (dua sisi) $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ disebut *grup*. Misalkan G suatu grup yang memiliki sifat $ab = ba$ untuk setiap pasangan elemen a dan b di G, maka G disebut *grup Abel* (Gallian, 2010).

2.2 Gelanggang dan Lapangan

Menurut Hungerford (1974), himpunan R dengan dua operasi biner yaitu tambah dan kali. $(R, +, \ \cdot)$ adalah suatu *gelanggang* jika berlaku

1. $(R, +)$ adalah grup Abel
2. $(R, \ \cdot)$ adalah semigrup
3. Berlaku hukum distributif $(\cdot)$ terhadap $(+)$, yaitu $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$.

Jika operasi kali pada R bersifat komutatif, maka R disebut *gelanggang komutatif*. Suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan setiap elemen tidak nol adalah unit (mempunyai invers terhadap kali) disebut *lapangan* (Gallian, 2010).

2.3 Homomorfisma

Menurut Hungerford (1974), misalkan G dan H adalah semigrup. Suatu fungsi $f : G \to H$ adalah *homomorfisma semigrup* jika berlaku

$$f(ab) = f(a)f(b). \ \forall a,b \in G.$$

Jika $G = H$, maka f disebut sebagai *endomorfisma semigrup*.

2.4 Matriks atas Lapangan

Himpunan dari semua matriks berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya merupakan unsur di lapangan F dinotasikan dengan $M_{m\times n}(F)$. Menurut Norman (2012), misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah dua matriks atas lapangan F yang berturut-turut berukuran $m \times m$ dan $n \times n$. *Tambah langsung* dari A dan B adalah matriks berukuran $(m + n) \times (m + n)$ sebagai berikut.

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Lemma 2.1 (Roman, 2008)

Misalkan A adalah suatu matriks berukuran $m \times p$ dan B adalah matriks berukuran $p \times n$, maka berlaku $(AB)^T = B^T A^T$.

Lemma 2.2 (Allen, 2003)

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran $n \times n$, maka berlaku

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Lemma 2.3 (Brown, 1993)

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka berlaku $A \, adj(A) = \det(A) \ I$

Lemma 2.4

Misalkan F adalah lapangan dan $A, B \in M_n(F)$, maka berlaku

$adj(AB) = adj(B) \ adj(A)$.

Bukti:

Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$. Akan ditunjukkan bahwa $adj(AB) = adj(B)adj(A)$. Berdasarkan Lemma 2.3, diperoleh

$$A \, adj(A) = \det(A) \ I, B \, adj(B) = \det(B) \ I,$$

dan

$$AB \, adj(AB) = \det(AB) \ I \qquad \text{(i)}$$

Berdasarkan Lemma 2.2, diperoleh $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Oleh karena $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $A \, adj(A) = \det(A) \ I$, dan $B \, adj(B) = \det(A) \ I$ maka berlaku

$$\begin{aligned} AB \, adj(B) \, adj(A) &= A \, B \, adj(B) \, adj(A) \\ &= A \, (B \, adj(B)) \, adj(A) \end{aligned}$$

$$= A\det(B)\ I\ adj(A)$$
$$= \det(B)\ A\ I\ adj(A)$$
$$= \det(B)\ A\ adj(A)$$
$$= \det(B)\det(A)\ I$$
$$= \det(A)\det(B)\ I$$
$$= \det(AB)\ I \qquad \text{(ii)}$$

Berdasarkan (i) dan (ii) diperoleh

$$AB\ adj(AB) = AB\ \big(adj(B)\big)\big(adj(A)\big).$$

Oleh karena itu, $adj(AB) = \big(adj(B)\big)\big(adj(A)\big)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $adj(AB) = \big(adj(B)\big)\big(adj(A)\big)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan F adalah suatu lapangan, $n \in \mathbb{Z}$ dengan $n \geq 3$, $M_n(F)$ adalah semigrup perkalian matriks atas F, $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan, serta untuk sebarang $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$, $A^\delta = [\delta(a_{ij})]$.

Lemma 3.1

Misalkan $A, B \in M_n(F)$ dan $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan.

a) Jika $A = B$ maka berlaku
   (i) $A^\delta = B^\delta$
   (ii) $\left(\big(adj(A)\big)^T\right)^\delta = \left(\big(adj(B)\big)^T\right)^\delta$

b) Untuk sebarang $A, B \in M_n(F)$ berlaku
   (i) $(AB)^\delta = A^\delta B^\delta$
   (ii) $\left(\big(adj(A)\big)^T\right)^\delta \left(\big(adj(B)\big)^T\right)^\delta = \left(\big(adj(AB)\big)^T\right)^\delta$.

Bukti:

Misalkan $A, B \in M_n(F)$ dan $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan.

a) Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$. Karena $A = B$, maka $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq n$.

(i) Oleh karena $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq n$ dan δ adalah endomorfisma lapangan, maka diperoleh

$$\delta(a_{ij}) = \delta(b_{ij}), \forall i, j, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Berarti

$$A^\delta = [\delta(a_{ij})] = [\delta(b_{ij})] = B^\delta.$$

Jadi terbukti bahwa $A^\delta = B^\delta$.

(ii) Misalkan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, C'_{ij} adalah kofaktor dari b_{ij}.Akibatnya $adj(A) = [d_{ij}]$, dan $adj(B) = [e_{ij}]$ dengan $d_{ij} = C_{ji}$ serta $e_{ij} = C'_{ji}$.

Perhatikan bahwa $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq n$. Oleh karena itu, diperoleh

$$C_{ij} = C'_{ij}, \qquad \forall i, j, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

dan berlaku

$$\big(adj(A)\big)^T = [d_{ij}]^T = [C_{ji}]^T = [C_{ij}] = [C'_{ij}]$$
$$= [C'_{ji}]^T = [e_{ij}]^T = \big(adj(B)\big)^T.$$

Jadi diperoleh $\big(adj(A)\big)^T = \big(adj(B)\big)^T$.

Karena $\big(adj(A)\big)^T = \big(adj(B)\big)^T$ dan δ adalah endomorfisma lapangan, maka berdasarkan (a) (i) berlaku

$$\left(\big(adj(A)\big)^T\right)^\delta = \left(\big(adj(B)\big)^T\right)^\delta.$$

Jadi terbukti bahwa $\left(\big(adj(A)\big)^T\right)^\delta = \left(\big(adj(B)\big)^T\right)^\delta$.

b) Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$. Misalkan $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, dan $AB = [d_{ij}]$ dengan $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $1 \leq i, j \leq n$.

(i) Oleh karena δ adalah endomorfisma lapangan maka berlaku

$$A^\delta = [\delta(a_{ij})],\ B^\delta = [\delta(b_{ij})],$$

dan

$$(AB)^\delta = [\delta(d_{ij})].$$

Misalkan $A^\delta B^\delta = [e_{ij}]$ dengan $e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta(a_{ik})\delta(b_{kj})$.

Oleh karena δ adalah endomorfisma lapangan dan $e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta(a_{ik})\delta(b_{kj})$, maka $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$ berlaku

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta(a_{ik})\delta(b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \delta(a_{ik}b_{kj})$$
$$= \delta\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$$
$$= \delta(d_{ij}).$$

Karena $e_{ij} = \delta(d_{ij})$, $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$, maka diperoleh

$$A^\delta B^\delta = [e_{ij}] = [\delta(d_{ij})] = (AB)^\delta.$$

Jadi terbukti bahwa $(AB)^\delta = A^\delta B^\delta$.

(ii) Misalkan $X = \big(adj(A)\big)^T$ dan $Y = \big(adj(B)\big)^T$.

Berdasarkan Lemma 3.1 b (i) diperoleh $(XY)^\delta = X^\delta Y^\delta$.

Berdasarkan Lemma 2.4 diperoleh

$$\big(adj(B)\big)\big(adj(A)\big) = adj(AB) \qquad (1)$$

Berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh

$$\big(adj(A)\big)^T \big(adj(B)\big)^T = \Big(\big(adj(B)\big)\big(adj(A)\big)\Big)^T \qquad (2)$$

Oleh karena $X^\delta Y^\delta = (XY)^\delta$ dan (1), (2) berlaku, maka diperoleh

$$\left(\big(adj(A)\big)^T\right)^\delta \left(\big(adj(B)\big)^T\right)^\delta$$
$$= \left(\big(adj(A)\big)^T \big(adj(B)\big)^T\right)^\delta$$
$$= \left(\Big(\big(adj(B)\big)\big(adj(A)\big)\Big)^T\right)^\delta$$
$$= \left(\big(adj(AB)\big)^T\right)^\delta.$$

Jadi terbukti bahwa $\left(\left(adj(AB)\right)^T\right)^\delta = \left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta$.

Teorema 3.1

Misalkan $P \in GL_n(F)$ dan $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan. Jika $f: M_n(F) \to M_n(F)$ adalah suatu pemetaan dengan

$$f(A) = PA^\delta P^{-1}, \forall A \in M_n(F),$$

maka f suatu endomorfisma semigrup.

Bukti:

Misalkan pemetaan $f: M_n(F) \to M_n(F)$

$$A \mapsto PA^\delta P^{-1} \qquad (3)$$

dimana $P \in GL_n(F)$ dan $\delta: F \to F$ adalah suatu endomorfisma lapangan.

Akan ditunjukkan: f endomorfisma semigrup.

- f terdefinisi dengan baik
  Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$ dengan $A = B$. Akan ditunjukkan: $f(A) = f(B)$.
  Oleh karena δ adalah endomorfisma lapangan dan $A = B$, maka berdasarkan Lemma 3.1 a (i) diperoleh $A^\delta = B^\delta$. Oleh karena itu, berlaku
  $$f(A) = PA^\delta P^{-1} = PB^\delta P^{-1} = f(B).$$
  Jadi terbukti bahwa $f(A) = f(B)$.
- f mengawetkan operasi $(\times)$
  Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$. Akan ditunjukkan: $f(AB) = f(A)f(B)$.
  Oleh karena$A$ dan B sebarang elemen di $M_n(F)$ serta δ adalah endomorfisma lapangan, maka berdasarkan Lemma 3.1 b (i), diperoleh $(AB)^\delta = A^\delta B^\delta$. Oleh karena itu, berlaku
  $$\begin{aligned} f(A)f(B) &= (PA^\delta P^{-1})(PB^\delta P^{-1}) \\ &= P(A^\delta B^\delta)P^{-1} \\ &= P(AB)^\delta P^{-1} \\ &= f(AB). \end{aligned}$$
  Jadi $f(AB) = f(A)f(B)$ untuk semua $A, B \in M_n(F)$. Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah endomorfisma semigrup.

Teorema 3.2

Misalkan $P \in GL_n(F)$ dan $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan. Jika $f: M_n(F) \to M_n(F)$ adalah suatu pemetaan dengan

$$f(A) = P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1}, \forall A \in M_n(F),$$

maka f suatu endomorfisma semigrup.

Bukti:

Misalkan pemetaan $f: M_n(F) \to M_n(F)$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M_n(F)$ berlaku

$$f(A) = P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \qquad (4)$$

dengan $P \in GL_n(F)$ dan $\delta: F \to F$ adalah suatu endomorfisma lapangan.

Akan ditunjukkan bahwa f endomorfisma semigrup.

- f terdefinisi dengan baik
  Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$ dengan $A = B$. Akan ditunjukkan bahwa $f(A) = f(B)$. Oleh karena δ adalah endomorfisma lapangan dan $A = B$, maka berdasarkan Lemma 3.1 a (ii), diperoleh
  $$\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta = \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta.$$
  Oleh karena itu, berlaku
  $$\begin{aligned} f(A) &= P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= P\left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= f(B). \end{aligned}$$
  Jadi terbukti bahwa $f(A) = f(B)$.
- f mengawetkan operasi $(\times)$
  Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$. Akan ditunjukkan bahwa $f(AB) = f(A)f(B)$. Oleh karena A dan B sebarang elemen di $M_n(F)$ serta δ adalah endomorfisma lapangan, maka berdasarkan Lemma 3.1 b (ii), diperoleh
  $$\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta = \left(\left(adj(AB)\right)^T\right)^\delta.$$
  Oleh karena itu, berlaku
  $$\begin{aligned} f(A)f(B) &\\ &= P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1}P\left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= P\left(\left(adj(AB)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= f(AB). \end{aligned}$$
  Jadi $f(AB) = f(A)f(B)$. Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah endomorfisma semigrup.

Teorema 3.3

Misalkan $P \in GL_n(F)$, $\theta : F \to F$ adalah endomorfisma semigrup, dan $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan. Jika $f: M_n(F) \to M_n(F)$ adalah suatu pemetaan dengan

$$f(A) = \theta(\det(A))PA^\delta P^{-1}, \forall A \in M_n(F),$$

maka f suatu endomorfisma semigrup.

Bukti:

Misalkan pemetaan $f: M_n(F) \to M_n(F)$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M_n(F)$ berlaku

$$f(A) = \theta(\det(A))PA^\delta P^{-1} \qquad (5)$$

dengan $P \in GL_n(F)$, $\theta: F \to F$ adalah endomorfisma semigrup, dan $\delta: F \to F$ adalah suatu endomorfisma lapangan. Akan ditunjukkan bahwa f endomorfisma semigrup.

- f terdefinisi dengan baik
  Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$ dengan $A = B$. Akan ditunjukkan bahwa $f(A) = f(B)$. Karena $A = B$, maka $\det(A) = \det(B)$. Oleh karena δ

adalah endomorfisma lapangan dan $A=B$, maka berdasarkan Lemma 3.1 a (i), diperoleh $A^\delta = B^\delta$. Oleh karena $\det(A)=\det(B)$ dan $A^\delta = B^\delta$, maka berlaku

$$\begin{aligned} f(A) &= \theta(\det(A))PA^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(B))PA^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(B))PB^\delta P^{-1} \\ &= f(B). \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $f(A)=f(B)$.

- f mengawetkan operasi $(\times)$
  Diambil sebarang $A,B \in M_n(F)$. Akan ditunjukkan bahwa $f(AB)=f(A)f(B)$. Berdasarkan Lemma 2.2 diperoleh $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. Oleh karena A dan B sebarang elemen di $M_n(F)$ serta δ adalah endomorfisma lapangan, maka berdasarkan Lemma 3.1 b (i), diperoleh $(AB)^\delta = A^\delta B^\delta$. Oleh karena $\det(AB)=\det(A)\det(B)$, $(AB)^\delta = A^\delta B^\delta$, dan θ endomorfisma, maka berlaku

$$\begin{aligned} &f(A)f(B) \\ &= \theta(\det(A))PA^\delta P^{-1}\theta(\det(B))PB^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(A))\theta(\det(B))PA^\delta P^{-1}PB^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(A)\det(B))PA^\delta B^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(AB))P(AB)^\delta P^{-1} \\ &= f(AB). \end{aligned}$$

  Jadi $f(AB)=f(A)f(B)$. Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah endomorfisma semigrup.

Teorema 3.4

Misalkan $P \in GL_n(F)$, $\theta: F \to F$ adalah endomorfisma semigrup, dan $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan. Jika $f: M_n(F) \to M_n(F)$ adalah suatu pemetaan dengan

$$f(A) = \theta(\det(A))P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1}, \forall A \in M_n(F),$$

maka f suatu endomorfisma semigrup.

Bukti:

Misalkan pemetaan $f: M_n(F) \to M_n(F)$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M_n(F)$ berlaku

$$f(A) = \theta(\det(A))P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \quad (6)$$

dengan $P \in GL_n(F)$, $\theta: F \to F$ adalah endomorfisma semigrup, dan $\delta: F \to F$ adalah suatu endomorfisma lapangan.

Akan ditunjukkan bahwa f endomorfisma semigrup.

- f terdefinisi dengan baik
  Diambil sebarang $A,B \in M_n(F)$ dengan $A=B$. Akan ditunjukkan bahwa $f(A)=f(B)$. Karena $A=B$, maka $\det(A)=\det(B)$. Oleh karena δ adalah endomorfisma lapangan dan $A=B$ maka berdasarkan Lemma 3.1 a (i), diperoleh

$$\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta = \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta.$$

  Oleh karena $\det(A)=\det(B)$ dan $\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta = \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta$ maka berlaku

$$\begin{aligned} f(A) &= \theta(\det(A))P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(B))P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(B))P\left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= f(B). \end{aligned}$$

  Jadi $f(A)=f(B)$.

- f mengawetkan operasi $(\times)$
  Diambil sebarang $A,B \in M_n(F)$.
  Akan ditunjukkan bahwa $f(AB)=f(A)f(B)$. Berdasarkan Lemma 2.2 diperoleh $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. Oleh karena A dan B sebarang elemen di $M_n(F)$ serta δ adalah endomorfisma lapangan maka berdasarkan Lemma 3.1 b (ii), diperoleh

$$\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta = \left(\left(adj(AB)\right)^T\right)^\delta.$$

  Oleh karena $\det(AB)=\det(A)\det(B)$, $\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta = \left(\left(adj(AB)\right)^T\right)^\delta$, dan θ endomorfisma maka berlaku

$$\begin{aligned} &f(A)f(B) \\ &= \theta(\det(A))P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1}\theta(\det(B)) P\left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(A))\theta(\det(B))P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1} P\left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(A)\det(B))P\left(\left(adj(A)\right)^T\right)^\delta \left(\left(adj(B)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= \theta(\det(AB))P\left(\left(adj(AB)\right)^T\right)^\delta P^{-1} \\ &= f(AB). \end{aligned}$$

  Jadi $f(AB)=f(A)f(B)$. Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah endomorfisma semigrup.

Teorema 3.5

Misalkan $P \in GL_n(F)$, $\pi: F \to GL_s(F) \cup \{0\}$ adalah homomorfisma semigrup dengan $\pi(1)=1$ dan $\pi(0)=0$, dan r,s adalah bilangan bulat nonnegatif yang memenuhi $r+s \le n$, dan $\oplus$ menyatakan tambah langsung dari matriks. Jika $f: M_n(F) \to M_n(F)$ adalah suatu pemetaan dengan

$$f(A) = P[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0]P^{-1}, \forall A \in M_n(F),$$

maka f suatu endomorfisma semigrup.

Bukti:

Misalkan pemetaan $f: M_n(F) \to M_n(F)$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M_n(F)$ berlaku

$$f(A) = P[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0]P^{-1} \quad (7)$$

dengan $P \in GL_n(F)$, $\pi: F \to GL_s(F) \cup \{0\}$ adalah homomorfisma semigrup dengan $\pi(1) = 1$ dan $\pi(0) = 0$, serta $r, s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, r + s \leq n$.

Akan ditunjukkan bahwa f endomorfisma semigrup.

- f terdefinisi dengan baik
  Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$ dengan $A = B$. Akan ditunjukkan bahwa $f(A) = f(B)$. Karena $A = B$, maka $\det(A) = \det(B)$. Oleh karena $\det(A) = \det(B)$, maka berlaku
  $$\begin{aligned} f(A) &= P[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0]P^{-1} \\ &= P[I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0]P^{-1} \\ &= f(B). \end{aligned}$$
  Jadi terbukti bahwa $f(A) = f(B)$.
- f mengawetkan operasi $(\times)$
  Diambil sebarang $A, B \in M_n(F)$. Akan ditunjukkan bahwa $f(AB) = f(A)f(B)$. Berdasarkan Lemma 2.2 diperoleh $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Diperhatikan untuk kasus $r + s = n$, berlaku
  $$[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0] = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \pi(\det(A)) \end{bmatrix}_{n \times n}$$
  dan
  $$[I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0] = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \pi(\det(B)) \end{bmatrix}_{n \times n}.$$
  Oleh karena itu, diperoleh
  $$\begin{aligned} &[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0][I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0] \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \pi(\det(A)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \pi(\det(B)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \pi(\det(A))\pi(\det(B)) \end{bmatrix}_{n \times n} \\ &= [I_r \oplus \pi(\det(A))\pi(\det(B)) \oplus 0]. \end{aligned}$$
  Untuk kasus $r + s < n$, berlaku
  $$[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0] = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \pi(\det(A)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$
  dan
  $$[I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0] = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \pi(\det(B)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$
  Oleh karena itu, diperoleh
  $$\begin{aligned} &[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0][I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0] \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \pi(\det(A)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \pi(\det(B)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \pi(\det(A))\pi(\det(B)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \\ &= [I_r \oplus \pi(\det(A))\pi(\det(B)) \oplus 0]. \end{aligned}$$
  Catatan: Matriks nol (0) berukuran $\big(n - (r + s)\big) \times \big(n - (r + s)\big)$. Oleh karena $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, π homomorfisma semigrup, dan
$[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0][I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0] = [I_r \oplus \pi(\det(A))\pi(\det(B)) \oplus 0]$, maka berlaku
  $$\begin{aligned} f(A)f(B) &= P[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0]P^{-1}P[I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0]P^{-1} \\ &= P[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0][I_r \oplus \pi(\det(B)) \oplus 0]P^{-1} \\ &= P[I_r \oplus \pi(\det(A))\pi(\det(B)) \oplus 0]P^{-1} \\ &= P[I_r \oplus \pi(\det(A)\det(B)) \oplus 0]P^{-1} \\ &= P[I_r \oplus \pi(\det(AB)) \oplus 0]P^{-1} \\ &= f(AB). \end{aligned}$$
  Jadi $f(AB) = f(A)f(B)$.

Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah endomorfisma semigrup.

4. Kesimpulan

Misalkan F adalah suatu lapangan, $n \in \mathbb{Z}$ dengan $n \geq 3$, $M_n(F)$ adalah suatu semigrup perkalian dari matriks atas F, $P \in GL_n(F)$, dan $\oplus$ menyatakan tambah langsung dari matriks. Pemetaan $\delta: F \to F$ adalah endomorfisma lapangan, $\theta: F \to F$ adalah endomorfisma semigrup, serta $\pi: F \to GL_s(F) \cup \{0\}$ adalah homomorfisma semigrup dengan $\pi(1) = 1$ dan $\pi(0) = 0$, dan r, s adalah bilangan bulat nonnegatif yang memenuhi $r + s \leq n$. Misalkan $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$, $A^\delta = [\delta(a_{ij})]$. Misalkan A sebarang elemen di $M_n(F)$ dan $f: M_n(F) \to M_n(F)$ adalah suatu pemetaan. Pemetaan-pemetaan oleh f berikut merupakan endomorfisma semigrup.

1. $f(A) = PA^\delta P^{-1}$
2. $f(A) = P\left(\left(Adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1}$
3. $f(A) = \theta(\det(A))PA^\delta P^{-1}$
4. $f(A) = \theta(\det(A))P\left(\left(Adj(A)\right)^T\right)^\delta P^{-1}$
5. $f(A) = P[I_r \oplus \pi(\det(A)) \oplus 0]P^{-1}$

Daftar Pustaka

Allen, G.D. (2003). *Linear Algebra and Matrices*. Texas: Texas A&M University Press.

Brown, W.C. (1993). *Matrices over Commutative Rings*. USA: Marcel Dekker, Inc.

Gallian, J.A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra* (Seventh Edition). Belmont: Brooks/Cole.

Hochwald, S.H. (1994). Multiplicative Maps on That Preserve the Spectrum. *Linear Algebra and its Applications*, 212/213: 339-351.

Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. Cleveland: Springer.

Jodeit, Jr. M. dan Lam T.Y. (1969). Multiplicative Maps of Matrix Semigroups. *Arch.Math*, 20: 10-16.

Norman, C. (2012). *Finitely Generated Abelian Groups and Similarity of Matrices over a Fields*. London: Springer.

Roman, S. (2008). *Advanced Linear Algebra* (Third Edition). New York: Springer.

Xian, Z., dan Chongguang, C. (2001). Homomorphisms between Matrix Multiplicative Semigroups. *JP J. Algebra Number Theory and Applications*, 1: 225-233.

Xian, Z., dan Chongguang, C. (2008). Homomorphisms between Multiplicative Semigroups of Matrices over Fields. *Acta Mathematica Scientia*, 28B(2): 461-468.