RING GOLDIE PRIMA DAN SUATU ORDER DARI SUATU RING HASIL BAGI

Novita Dahoklory

Universitas Gadjah Mada
Bulaksumur, Caturtunggal, Kode Pos: 55281, Yogyakarta
e-mail: novitadahoklory93@gmail.com

Abstrak

Diberikan suatu ring hasil bagi Q. Suatu subring R dalam ring hasil bagi Q disebut sebagai order jika Q merupakan ring hasil bagi dari R oleh himpunan semua elemen reguler di dalam R. Di lain pihak, suatu ring R disebut ring Goldie prima apabila R merupakan ring Goldie kanan dan ring Goldie prima serta ring prima. Dalam penelitian ini akan diberikan beberapa sifat yang berlaku dalam ring Goldie prima. Selanjutnya, dengan menggunakan sifat tersebut, akan diberikan hubungan antara ring Goldie prima dan order dalam suatu ring hasil bagi. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa jika R merupakan ring Goldie prima maka R merupakan order dalam suatu ring Artin sederhana.

Kata Kunci: Ring Goldie prima, ring hasil bagi, order.

TITLE (A PRIME GOLDIE RING AND AN ORDER OF A QUOTIENT RING)

Abstract

Let Q be a quotient ring. A subring R of Q is called an order if Q is its quotient ring by the set of all reguler element in R. On the other side, a ring is called prime Goldie if R is both right Goldie and left Goldie ring and is a prime ring. In this research, we will discuss some properties of prime Goldie ring. Morever, using those properties, we will give the relation between prime Goldie ring and an order in a quotient ring. This research will show that if R is a prime Goldie ring then R is an order of a simple Artinian ring.
Keywords: Prime Goldie ring, quotient ring, order.

1. Pendahuluan

1.1. Latar Belakang

Hubungan antara $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ memotivasi pembentukan lapangan hasil bagi dari suatu daerah integral dengan memanfaatkan himpunan semua elemen yang bukan pembagi nol atau elemen reguler di $\mathbb{Z}$ yaitu $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ yang merupakan himpunan multiplikatif pada $\mathbb{Z}$. Diketahui bahwa himpunan semua elemen reguler pada suatu ring R (dinotasikan dengan $C_R(O)$) merupakan himpunan multiplikatif di ring tersebut. Hal ini kemudian memotivasi pembentukan pembentukan ring hasil bagi dari suatu ring komutatif dengan elemen satuan R dengan memanfaatkan sebarang himpunan multiplikatif S di R. Namun apabila diperumum pada ring dengan elemen satuan yang tidak harus komutatif, eksistensi ring hasil bagi dari R oleh S belum tentu terjamin. Hal ini kemudian memunculkan definisi ring hasil bagi kanan (kiri) dari R oleh S Dalam bukunya Lam,.dkk.(1991) memberikan syarat perlu dan cukup agar ring hasil bagi dari R oleh S ada yaitu dengan menambah syarat pada himpunan S

Selanjutnya ring hasil bagi kanan (kiri) dari R oleh $C_R(O)$ (jika ada) disebut sebagai ring hasil bagi klasik yang kemudian dinotasikan sebagai $Q(R)$. Dalam hal R merupakan integral, ring $Q(R)$ ada dan $Q(R)$ merupakan lapangan. Lebih khusus, apabila R merupakan lapangan maka $Q(R)$ merupakan ring R sendiri. Hal ini memunculkan kejadian khusus dimana ring hasil bagi dari suatu ring merupakan ring itu sendiri. Syarat yang harus dipenuhi untuk memenuhi hal tersebut adalah setiap elemen reguler di ring R merupakan elemen unit. Hal ini kemudian memotivasi definisi dari ring hasil bagi yaitu suatu ring dengan setiap elemen regulernya merupakan elemen unit. Diberikan suatu ring hasil bagi Q. Diketahui bahwa ada subring yaitu Q sendiri sedemikian sehingga Q merupakan hasil bagi yang kemudian memotivasi definisi order. Suatu subring R di Q ring hasil bagi disebut sebagai order dalam Q apabila Q merupakan ring hasil bagi dari R oleh $C_R(O)$.

Dalam teori ring, dikenal juga ring Goldie prima yaitu ring Goldie kiri dan Goldie kanan serta bersifat prima. Dalam bukunya McConnell.,dkk. (2001) membuktikan bahwa apabila R suatu ring Goldie prima maka eksistensi merupakan ring hasil bagi dari R oleh $C_R(O)$ terjamin. Dalam penelitian ini dijelaskan struktur order beserta sifat yang berlaku pada order dalam suatu ring hasil bagi. Selanjutnya akan diberikan sifat yang berlaku pada ring Goldie prima. Lebih lanjut, akan diberikan hubungan ring Goldie prima dan order dalam ring hasil bagi.

Pada penelitian ini, jika tidak ada keterangan yang lain maka yang dimaksud dengan ring adalah ring dengan elemen satuan. Pada peneltian ini tidak memuat suatu kebaruan namun menambahkan beberapa contoh dan memperjelas bukti dalam beberapa penelitian yang menjadi acuan.

1.2. Tinjauan Pustaka

Teori order merupakan salah satu topik aljabar dalam teori ring yang termotivasi dari hubungan antara suatu daerah integral dan lapangan hasil bagi. Suatu ring R dalam suatu ring Q disebut sebagai order apabila Q merupakan ring hasil bagi dari R oleh himpunan semua elemen reguler di dalam R [6]

Dasar teori mengenai ring yaitu ring prima, ring semiprima, ring sederhana, ring semisederhana ring Artin dan ring Noether mengacu pada [8] serta elemen reguler dan himpunan pengenol merujuk pada [9]. Selanjutnya untuk menjelaskan definisi ring Goldie diperlukan beberapa teori pendukung yaitu modul seragam dan submodul esensial merujuk pada [6]. Lebih lanjut untuk pendefinisian order diperlukan juga teori penunjang seperti ring hasil bagi yang merupakan perumuman dari lapangan hasil bagi merujuk pada [4] dan [3], dan [1]. Hubungan antara definisi serta hubungan ring Goldie prima dan order dalam suatu ring hasil bagi merujuk pada [6], [2], dan [5].

1.3. Landasan Teori

Definisi 1[8]

Diberikan suatu ring R.

i. Suatu ideal P di ring R disebut **ideal prima** jika untuk setiap ideal A, B di R dengan $AB \subseteq P$ berakibat $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.
ii. Suatu ideal P di ring R disebut **ideal semiprima** jika untuk setiap ideal A di R dengan $A^2 \subseteq P$ berakibat $A \subseteq P$.

Definisi 2 [8]

i. Suatu ring R disebut **ring prima** jika ideal nol di R merupakan ideal prima.
ii. Suatu ring R disebut ring **semiprima** jika ideal nol di R merupakan ideal semiprima.

Definisi 3 [9]

Diberikan ring R dan $A \subseteq R$ dengan $A \neq \emptyset$. Didefinisikan

1. $Ann_R^l(A) = \{s \in R | \forall a \in A, sa = 0\}$, yang disebut sebagai **pengenol kiri** (left annihilator) A.
2. $Ann_R^r(A) = \{s \in R | \forall a \in A, as = 0\}$, yang disebut sebagai **pengenol kanan** (right annihilator) A.
3. $Ann_R(A) = Ann_R^r(A) \cap Ann_R^l(A)$ yaitu pengenol kiri sekaligus pengenol kanan, yang disebut sebagai **pengenol** dari A.

Untuk memudahkan penulisan untuk suatu ring R, $Ann_R^r(A)$ cukup dituliskan dengan $Ann^r(A)$. Begitu juga dengan $Ann_R^l(A)$ cukup dituliskan dengan $Ann^l(A)$.

Proposisi 1 [9]

Diberikan ring R. Untuk sebarang himpunan tak kosong A di R berlaku $Ann^l(A)$ merupakan ideal kiri di R dan $Ann^r(A)$ merupakan ideal kanan di R.

Definisi 4 [9]

Diberikan suatu ring R.

1. Suatu elemen $x \in R$ disebut **reguler kanan** di R jika x bukan pembagi nol

kanan yaitu untuk setiap $r \in R$ jika $rx = 0$ maka $r = 0$.

2. Suatu elemen $x \in R$ disebut **reguler kiri** di R jika x bukan pembagi nol kiri yaitu untuk setiap $r \in R$ jika $xr = 0$ maka $r = 0$.
3. Suatu elemen $x \in R$ disebut **reguler** di R jika x reguler kanan sekaligus reguler kiri. Himpunan semua elemen reguler di R dinotasikan dengan $C_R(0)$.

Ditinjau pada Definisi 1.1. Jika x merupakan elemen reguler di R maka berlaku $Ann^r(x) = Ann^l(x) = 0$.

Definisi 5 [8]

1. Ring R disebut **ring Noether kanan** jika untuk sebarang rantai naik ideal kanan $\{I_n\}_{n\in}$ dari R, terdapat $n_0 \in$ sedemikian hingga untuk sebarang bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $I_n = I_{n+1}$.
2. Ring R disebut **ring Artin kanan** jika untuk sebarang rantai turun ideal kanan $\{I_n\}_{n\in}$ dari R, terdapat $n_0 \in$ sedemikian hingga untuk sebarang bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $I_n = I_{n+1}$.

Contoh 1

1. Diberikan ring . Diketahui bahwa sebarang ideal di dapat dinyatakan dengan n untuk suatu bilangan bulat n. Diambil sebarang rantai naik ideal-ideal di yaitu $\{I_{n_i} | i = 1,2,\dots\}$. Diperoleh
$$I_{n_1} \subseteq I_{n_2} \subseteq \dots.$$
Diperhatikan bahwa $n_2, n_3, \dots$ merupakan faktor pembagi dari n_1. Selanjutnya misalkan n_t adalah faktor prima terkecil dari n_1. Dari sini, didapatkan
$$I_{n_1} \subseteq I_{n_2} \subseteq \dots \subseteq I_{n_t}.$$
Dengan kata lain rantai naik tersebut bersifat stasioner. Jadi, merupakan ring Noether.

2. Perkalian langsung berhingga dari lapangan yaitu $K = \prod_{i=1}^{n}$ merupakan ring Artin kanan sekaligus ring Artin kiri karena setiap ideal di K berbentuk $\prod_{i=1}^{n} I_i$ dengan I_i ideal di yaitu 0 dan K sendiri. Oleh karena itu setiap rantai turun di K memenuhi kondisi rantai turun.

Definisi 6 [8]

Diberikan ring R.

1. Ring R disebut **ring sederhana** jika $R^2 \neq 0$ dan R tidak memuat ideal non trivial.
2. Ring R disebut **ring sederhana kanan** jika $R^2 \neq 0$ dan R tidak memuat ideal kanan non trivial.
3. Ring R disebut **ring sederhana kiri** jika $R^2 \neq 0$ dan R tidak memuat ideal kiri non trivial.

Berdasarkan definisi di atas, jelas bahwa setiap lapangan R merupakan ring sederhana. Hal ini disebabkan oleh setiap ideal tak nol di R memuat elemen unit.

Definisi 7 [8]

Diberikan ring R .

1. Suatu ideal kiri I di R disebut **ideal minimal kiri** jika $I \neq 0$ dan tidak memuat ideal kiri non trivial di R.

2. Suatu ideal kanan I di R disebut **ideal minimal kanan** jika $I \neq 0$ dan tidak memuat ideal kanan non trivial di R.

3. Suatu ideal I di R disebut **ideal minimal** jika $I \neq 0$ dan tidak memuat ideal non trivial di R.

Contoh 2

Diberikan ring $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$. Diperhatikan bahwa
$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
merupakan ideal kanan di R. Dari sini, didapatkan I_1 tidak memuat ideal kanan selain ideal nol. Oleh

karena itu, dapat disimpulkan bahwa I_1 merupakan ideal minimal kanan di ring R.

Definisi 8 [8]

Suatu ring R disebut

1. **Ring semisederhana** jika R merupakan jumlahan langsung ideal-ideal minimal;
2. **Ring semisederhana kanan** jika R merupakan jumlahan langsung ideal-ideal minimal kanan;
3. **Ring semisederhana kiri** jika R merupakan jumlahan langsung ideal-ideal minimal kiri.

Contoh 3

Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$. Diketahui bahwa ideal di dalam $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{0\}$, $\{\bar{0},\bar{3}\}, \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$, dan $\mathbb{Z}_6$. Diperhatikan bahwa $\{\bar{0},\bar{3}\}$, dan $\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ merupakan ideal minimal di $\mathbb{Z}_6$. Lebih lanjut, $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\} + \{\bar{0},\bar{3}\}$ dan $\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\} \cap \{\bar{0},\bar{3}\} = 0$. Jadi, $\mathbb{Z}_6$ merupakan jumlahan langsung dari ideal-ideal minimal. Oleh karena itu, dapat disimpulkan $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring semisederhana.

Lemma 1 [3]

Jika R ring semisederhana kanan maka R merupakan ring Noether kanan dan ring Artin kanan.

Definisi 9 [6]

Diberikan suatu R-modul kanan M. Suatu R-submodul kanan N dari M dikatakan **esensial** di M apabila untuk sebarang R-submodul tak nol X dari M berlaku $N \cap X \neq \{0\}$.

Definisi di atas analog untuk R-modul kiri M. Dari definisi tersebut, jelas bahwa M merupakan R-submodul esensial atas dirinya sendiri. Berikut diberikan contoh R-submodul esensial lain dari suatu R-modul kanan M. Diperhatikan bahwa jika suatu ring R dipandang sebagai R-modul kanan atas dirinya sendiri, maka ideal kanan I merupakan submodul dari R. Selanjutnya, ideal kanan I yang merupakan submodul esensial di R disebut **ideal kanan esensial** dan dinotasikan sebagai $I \trianglelefteq_e R$. Secara analog, ideal kiri I yang merupakan submodul esensial di R disebut **ideal kiri esensial** dan dinotasikan sebagai $I \trianglelefteq_e R$.

Definisi 10 [6]

Suatu R-modul tak nol U dikatakan **seragam** jika setiap submodul tak nol dari U merupakan submodul esensial di U.

Diberikan -modul . Modul tersebut merupakan -modul seragam, karena untuk setiap submodul tak nol N_1, N_2 di yaitu $N_1 = a$ dan $N = b$ dengan $a, b \neq 0$. Diperhatikan bahwa $ab \neq 0$ dan $ab \in N_1 \cap N_2$. Akibatnya $N_1 \cap N_2 \neq 0$. Jadi, merupakan $-$modul seragam.

Contoh 4

Diberikan -modul $\mathbb{Z} - [x]$. Modul tersebut bukan merupakan R-modul seragam, karena terdapat R-submodul $N_1 = \{nx \mid n \in\}$ dan $N_2 = \{nx^2 \mid n \in$ $\}$ sedemikian hingga $N_1 \cap N_2 = \{0\}$.

Lemma 2 [2]

Diberikan suatu $R-$modul kanan M. Jika K merupakan submodul esensial di M maka untuk setiap $a \in M$ terdapat $L \trianglelefteq_e R$ sedemikian sehingga $aL \neq 0$ dan $aL \subseteq K$.

Lemma 3 [6]

Suatu ring R merupakan ring semisederhana kanan jika dan hanya jika R tidak memuat ideal kanan esensial sejati.

Definisi 11 [6]

Diberikan suatu ring R dengan elemen satuan, dan himpunan tertutup secara multiplikatif S di R. Diberikan pula suatu ring Q dengan elemen satuan. Ring Q disebut **ring hasil bagi kanan** dari R (oleh S) jika terdapat suatu homomorfisma ring $\theta: R \to Q$ sedemikian hingga berlaku:

1. $(\forall s \in S)\ \theta(s)$ merupakan unit di Q,
2. $(\forall q \in Q)(\exists r \in R)(\exists s \in S)\ q = \theta(r)\theta(s)^{-1}$,
3. $\ker(\theta) = \{r \in R \mid (\exists s \in S)\ rs = 0\}$.

Selanjutnya θ dikatakan **bersesuaian** dengan Q sebagai ring hasil bagi kanan.

Definisi 12[6]

Diberikan suatu ring R dengan elemen satuan, dan himpunan tertutup secara multiplikatif S di R. Diberikan pula suatu ring Q dengan elemen satuan. Ring Q disebut **ring hasil bagi kiri** dari R (oleh S) jika terdapat suatu homomorfisma ring $\theta: R \to Q$ sedemikian hingga berlaku:

1. $(\forall s \in S)\ \theta(s)$ merupakan unit di Q,

2.$(\forall q \in Q)(\exists r \in R)(\exists s \in S)\ q = \theta(s)^{-1}\theta(r)$,

3. $\ker(\theta) = \{r \in R \mid (\exists s \in S)\ sr = 0\}$.

Selanjutnya θ dikatakan **bersesuaian** dengan Q sebagai ring hasil bagi kiri.

Definisi 13 [6]

Diberikan ring R.

i. Suatu himpunan tertutup secara multiplikatif S di R dikatakan memenuhi **kondisi Ore kanan** jika untuk sebarang $r \in R$ dan $s \in S$, terdapat $r' \in R$ dan $s' \in S$ sedemikian hingga $rs' = sr'$.
ii. suatu himpunan tertutup secara multiplikatif S di ring R dikatakan memenuhi **kondisi Ore kiri** jika untuk sebarang $r \in R$ dan $s \in S$, terdapat $r' \in R$ dan $s' \in S$ sedemikian hingga $s'r = r's$.

Definisi 14 [4]

Diberikan ring R.

i. Suatu himpunan tertutup secara multiplikatif S di ring R dikatakan **reversibel kanan** jika untuk setiap $r \in R$ dengan $s'r = 0$ untuk suatu $s' \in S$ maka terdapat $s \in S$ sedemikian sehingga $rs = 0$.
ii. Suatu himpunan tertutup secara multiplikatif S di ring R dikatakan **reversibel kiri** jika untuk setiap $r \in R$ dengan $rs' = 0$ untuk suatu $s' \in S$ maka terdapat $s \in S$ sedemikian sehingga $sr = 0$.

Contoh 5

Diberikan ring R dan himpunan semua elemen reguler di R yaitu $C_R(0.)$ Diperhatikan bahwa $C_R(0)$ merupakan himpunan tertutup secara multiplikatif di R. Untuk setiap $r \in R$ berlaku $sr \neq 0$ untuk setiap $s \in C_R(0)$. Dengan demikian diperoleh $C_R(0)$ reversibel kanan. Secara analog, dapat ditunjukkan $C_R(0)$ reversibel kiri.

Definisi 15 [4]

Diberikan ring R dan suatu himpunan tertutup secara multiplikatif S di R.

i. Himpunan S disebut **himpunan penyebut kanan** jika memenuhi kondisi Ore kanan dan reversibel kanan.
ii. Suatu himpunan tertutup secara multiplikatif S di R disebut **himpunan penyebut kiri** jika memenuhi kondisi Ore kiri dan reversibel kiri.

Teorema 1 [4]

Diberikan ring R dan himpunan tertutup secara multiplikatif S di R dengan $0 \neq S$ dan $1_R \in S$. Ring hasil bagi kanan dari R oleh S ada jika dan hanya jika S merupakan himpunan penyebut kanan (kiri).

Teorema 2 [6]

Diberikan ring R dan himpunan tertutup secara multiplikatif S di R dengan $0 \neq S$ dan $1_R \in S$. Jika ring hasil bagi kanan dan ring hasil bagi kiri dari R oleh S ada, katakan Q^r dan Q^l, maka $Q^r \simeq Q^l$.

Jika diberikan ring hasil bagi kanan $Q = R_S$ dengan $\theta: R \to Q$ homomorfisma ring yang bersesuaian, maka untuk sebarang $A \subseteq R$ dan $B \subseteq Q$, dinotasikan

$$AQ = \langle \theta(A) \rangle_r = \langle \{\theta(a) \mid a \in A\} \rangle_r$$

dan

$$B \cap R = \theta^{-1}(B) = \{r \in R \mid \theta(r) \in B\}.$$

Secara analog, untuk ring hasil bagi kiri $_SR$, dinotasikan $QA = \langle \{\theta(a) \mid a \in A\} \rangle_l$ dan $B \cap R = \theta^{-1}(B) = \{r \in R \mid \theta(r) \in B\}$. Diperhatikan bahwa jika $R \subseteq Q$, maka hasil pendefinisian AQ di atas akan sama dengan AQ yang dibentuk melalui perkalian ring. Begitu juga untuk $B \cap R$, hasilnya akan sama dengan yang dibentuk melalui irisan dua buah himpunan tersebut.

Dari pendefinisian tersebut, akan diberikan hubungan antara ideal-ideal kanan di R dengan ideal-ideal kanan di Q pada proposisi berikut.

Proposisi 2 [6]

Diberikan suatu ring R dan $S \subseteq R$ himpunan penyebut kanan. Misalkan $Q = R_S$ ring hasil bagi dari R oleh S.

1. Jika B ideal kanan di Q, maka $B \cap R$ ideal kanan di R dan $B = (B \cap R)Q$.
2. Jika A ideal kanan di R, maka berlaku:
   (a) $AQ = \{\theta(a)\theta(s)^{-1} \mid a \in A, s \in S\}$,
   (b) $AQ \cap R = \{r \in R \mid (\exists s \in S)\ rs \in A\}$.

Proposisi 3 [6]

Diberikan suatu ring R dan $S \subseteq R$ himpunan Ore kanan sedemikian hingga setiap elemen di S merupakan elemen reguler di R. Misalkan terdapat Q merupakan ring hasil bagi kanan dari R oleh S dengan A ideal kanan di R dan B ideal kanan di Q berlaku

1. Jika AQ esensial di Q, maka A esensial di R.
2. Jika B esensial di Q, maka $B \cap R$ esensial di R.

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas ring Goldie prima dan order dalam suatu ring. Selanjutnya akan diberikan hubungan antara ring Goldie prima dan order dalam suatu ring hasil bagi.

2.1. Ring Goldie Prima

Pada bagian ini akan dibahas ring Goldie kanan serta sifat-sifat yang berlaku di dalamnya. Secara analog juga diperoleh sifat-sifat yang berlaku di ring Goldie kiri. Namun sebelumnya, dibahas terlebih dahulu modul berdimensi seragam hingga.

Definisi 16 [6]

Suatu R-modul M dikatakan **berdimensi seragam hingga** (*finite uniform dimension*) jika setiap R-submodul tak nol di M bukan merupakan hasil jumlah langsung di tak berhingga banyaknya R-submodul tak nol.

Dari definisi di atas, jelas bahwa sebarang submodul dari suatu modul berdimensi seragam hingga pasti berdimensi seragam hingga pula. Berikut diberikan contoh R-modul yang berdimensi seragam hingga dan yang tidak.

Contoh 6

Diberikan ruang vektor berdimensi hingga M atas suatu lapangan R. Diketahui bahwa M merupakan modul atas R. Karena M berdimensi hingga diperoleh M tidak memuat submodul yang merupakan jumlahan langsung dari tak berhingga banyaknya R −submodul tak nol di M. Jadi, M merupakan R −modul berdimensi seragam hingga.

Contoh 7

$\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}[x]$ tidak bersifat seragam, karena terdapat $\mathbb{Z}$ −submodul tak nol $N_1 = \{nx|n \in \mathbb{Z}\}$ dan $N_2 = \{nx^2|n \in \mathbb{Z}\}$ dengan $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Diperhatikan bahwa $(N_1 \oplus N_2 = \{n_1x + n_2x^2\ |n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ tidak esensial, karena terdapat $\mathbb{Z}$ −submodul tak nol $N_3 = \{nx^3|n \in \mathbb{Z}\}$ sedemikian hingga $(N_1 \oplus N_2) \cap N_3 = \{0\}$. Selanjutnya, $(N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 = \{n_1x + n_2x^2 + n_3x^3\ |n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}\}$juga tidak esensial, karena terdapat $\mathbb{Z}$ −submodul tak nol $N_4 = \{nx^4|n \in \mathbb{Z}\}$ sedemikian hingga $(N_1 \oplus N_2 \oplus N_3) \cap N_4 = \{0\}$.

Apabila langkah tersebut dapat dilanjutkan terus-menerus untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dari sini, terbentuk suatu $\mathbb{Z}$ −submodul $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} N_k$ dengan $N_k = \{nx^k|n \in \mathbb{Z}\}$. Akibatnya, $\mathbb{Z}[x]$ sebagai $\mathbb{Z}$ −modul tidak berdimensi seragam hingga.

Definisi 17 [6]

i. Ring R disebut **ring Goldie kanan** apabila ring R berdimensi seragam hingga sebagai R-modul kanan dan memenuhi kondisi rantai naik untuk annihilator kanan, dalam artian bahwa untuk setiap rantai naik annihilator-annihilator kanan di R yaitu $\{Ann^r(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan $A_n \subseteq R$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $Ann^r(A_n) = Ann^r(A_{n+1})$ untuk setiap $n \geq n_0$.
ii. Ring R disebut **ring Goldie kiri** apabila R berdimensi seragam hingga sebagai R-modul kiri dan memenuhi kondisi rantai naik annihilator kiri, dalam artian bahwa untuk setiap

rantai naik annihilator-annihilator kiri di R yaitu $\{Ann^l(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan $A_n \subseteq R$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $Ann^l(A_n) = Ann^l(A_{n+1})$ untuk setiap $n \geq n_0$.

iii. Ring R disebut **ring Goldie** apabila R merupakan ring Goldie kanan sekaligus ring Goldie kiri.

Contoh 8

Setiap ring Noether kanan (kiri) merupakan ring Goldie kanan (kiri). Jelas bahwa R memenuhi kondisi rantai naik pada anihilator-anihilator kanan di R. Selanjutnya akan ditunjukkan R sebagai $R-$modul kanan berdimensi seragam hingga. Diandaikan R tidak berdimensi seragam hingga, yang berarti terdapat ideal kanan yang merupakan jumlahan langsung dari tak hingga banyaknya ideal-ideal kanan tak nol di R yaitu

$$I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots.$$

Akibatnya terbentuk rantai naik ideal-ideal kanan tak nol sebagai berikut

$$I_1 \subseteq I_1 + I_2 \subseteq I_1 + I_2 + I_3 \subseteq \ldots.$$

Diperhatikan bahwa rantai di atas tidak bersifat stasioner. Hal ini merupakan kontradiksi karena R merupakan ring Noether kanan. Jadi, dapat disimpulkan bahwa R merupakan ring Goldie kanan.

Lemma 4 [1]

Diberikan ring Goldie kanan R . Jika $a \in R$ dengan $Ann^r(a) = 0$ maka $aR \trianglelefteq_e R$.

Bukti.

Diambil sebarang $a \in R$ dengan $Ann^r(a) = 0$. Akan ditunjukkan $aR \trianglelefteq_e R$. Andaikan aR tidak esensial, yang berarti terdapat ideal kanan tak nol I di R dengan $aR \cap I = 0$. Akan dibuktikan bahwa $aI + a^2I + a^3I + \ldots$ merupakan jumlahan langsung di R. Pertama-tama akan dibuktikan untuk setiap $a^{n_1}b_1 + a^{n_2}b_2 + \ldots + a^{n_j}b_j \in aI + a^2I + a^3I + \ldots$ dengan $a^{n_1}b_1 + a^{n_2}b_2 + \ldots + a^{n_j}b_j = 0$ dan $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$ berlaku $b_1 = b_2 = \ldots = b_j = 0$. Dengan menggunakan fakta bahwa $Ann^r(a) = 0$, didapatkan

$$b_1 + a^{n_2-n_1}b_2 + \ldots + a^{n_j-n_1}b_j = 0.$$

Akibatnya $-b_1 = a^{n_2-n_1}b_2 + \ldots + a^{n_j-n_1}b_j \in I \cap aR$ dan $b_1 = 0$. Dari sini, didapatkan

$$a^{n_3-n_2}b_3 + \ldots + a^{n_j-n_2}b_j = -b_2 \in I \cap aI$$

dan $b_2 = 0$. Dengan langkah yang sama dapat ditunjukkan $b_1 = b_2 = \ldots = b_j = 0$. Diambil sebarang $z \in a^\lambda I \cap \sum_{n\neq\lambda} I^n$ untuk setiap $n \in$. Jadi,

$$z = a^\lambda b_\lambda = a^{m_1}b_1 + a^{m_2}b_2 + \ldots a^{m_{j-1}}b_{j-1} \in a^\lambda I \cap \sum_{n\neq\lambda} I^n.$$

Kemudian dengan pengurutan kembali didapatkan $a^{n_1}b_1 + a^{n_2}b_2 + \ldots - a^{n_k}b_k + \ldots + a^{n_j}b_j = 0$ dengan $a^\lambda b_\lambda = a^{n_k}b_k$ untuk suatu $k \in \{1,2,\ldots,j\}$ dan $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$. Dengan menggunakan fakta sebelumnya diperoleh $b_1 = b_2 = \ldots = b_j = 0$. Akibatnya $a^\lambda I \cap \sum_{n\neq\lambda} I^n = 0$. Jadi, dapat dibentuk jumlahan langsung

$$aI \oplus a^2I \oplus \ldots.$$

Hal ini mengakibatkan kontradiksi karena R sebagai $R-$modul kanan berdimensi seragam hingga. Jadi, haruslah $aR \trianglelefteq_e R$.

Lemma 5 [1]

Diberikan ring R. Himpunan $\zeta(R)$, dengan $\zeta(R) = \{x \in R | xA = 0, \text{untuk suatu } A \trianglelefteq_e R\}$ dalam R merupakan ideal di R.

Bukti.

Diketahui bahwa

$$\zeta(R) = \{x \in R | xA = 0, \text{untuk suatu } A \trianglelefteq_e R\}.$$

Jelas bahwa $\zeta(R) \neq \emptyset$, karena $0 \cdot R = 0$ dan R merupakan ideal kanan esensial. Akibatnya $0 \in \zeta(R)$. Selanjutnya diambil sebarang $a, b \in \zeta(R)$. Jadi, $Ann^r(a) \cap Ann^r(b) \trianglelefteq_e R$. Diperhatikan bahwa $Ann^r(a) \cap Ann^r(b) \subseteq Ann^r(a-b)$. Jadi, $Ann^r(a-b) \trianglelefteq_e R$ dan $a - b \in \zeta(R)$.

Kemudian, diambil sebarang $a \in \zeta(R)$ dan $r \in R$. Jadi, $Ann^r(a) \trianglelefteq_e R$. Akan ditunjukkan $ar \in \zeta(R)$. Dalam hal ini akan dibuktikan $Ann^r(ar) \trianglelefteq_e R$. Andaikan $Ann^r(ar)$ bukan merupakan ideal kanan esensial di R. Artinya, terdapat ideal kanan tak nol I di R

sedemikian sehingga $Ann^r(ar) \cap I = 0$. Akibatnya untuk setiap $b \in I$ dengan $b \neq 0$ berlaku $arb \neq 0$ dan $rb \neq 0$. Jadi, diperoleh rI merupakan ideal kanan tak nol di R. Dengan mengingat bahwa $Ann^r(a) \trianglelefteq_e R$, didapatkan $Ann^r(a) \cap rI \neq 0$. Misalkan $rc \in Ann^r(a) \cap rI$ dengan $rc \neq 0$ dan $c \neq 0$ untuk suatu $c \in I$. Dari sini, diperoleh $arc = 0$, sehingga $c \in Ann^r(ar) \cap I$. Hal ini mengakibatkan kontradiksi karena $Ann^r(ar) \cap I = 0$. Oleh karena itu haruslah $Ann^r(ar)A \trianglelefteq_e R$. Dengan demikian diperoleh $ar \in \zeta(R)$.

Lebih lanjut akan ditunjukkan $\zeta(R)$ merupakan ideal kiri. Untuk setiap $r \in R$ dan $b \in \zeta(R)$. Jelas bahwa $Ann^r(b) \trianglelefteq_e R$ dan $Ann^r(b) \subseteq Ann^r(rb)$. Hal ini mengakibatkan $Ann^r(rb) \trianglelefteq_e R$ dan $rb \in \zeta(R)$. Jadi, terbukti $\zeta(R)$ merupakan ideal di R.

Ideal $\zeta(R)$ di ring R disebut sebagai **ideal singular** dari [1]. Lebih lanjut akan diberikan sifat yang berlaku pada ideal singular di suatu ring Goldie kanan sebagai berikut.

Lemma 6 [1]

Jika ring R merupakan ring Goldie kanan maka $\zeta(R)$ merupakan ideal nilpoten.

Bukti. Tulis $A = \zeta(R)$. Diperhatikan bahwa

$$Ann^r(A) \subseteq Ann^r(A^2) \subseteq \ldots.$$

Dengan mengingat bahwa R merupakan ring Goldie kanan, yang berarti terdapat $n_0 \in$ sedemikian sehingga $Ann^r(A^n) = Ann^r(A^{n+1})$ untuk setiap $n \geq n_0$. Akan dibuktikan bahwa $A^{n+1} = 0$. Andaikan $A^{n+1} \neq 0$. Artinya, terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $aA \neq 0$. Dibentuk koleksi ideal kanan

$$\mathcal{I} = \{Ann^r(a) | a \in A, A^n a \neq 0\}.$$

Mengingat R memenuhi rantai naik pada annihilator kanan, yang berarti terdapat elemen maksimal di $\mathcal{I}$. Katakan $Ann^r(z)$ merupakan elemen maksimal di $\mathcal{I}$ untuk suatu $z \in A$ dan $A^n z \neq 0$. Diperhatikan juga bahwa untuk setiap $b \in A$ berlaku $Ann^r(b) \trianglelefteq_e R$. Jadi, $Ann^r(b) \cap zR \neq 0$. Artinya, terdapat $zr \in Ann^r(b) \cap zR$ dengan $zr \neq 0$. Dari sini, didapatkan $bzr = 0$ dan $r \in Ann^r(bz)$ tetapi $r \notin Ann^r(z)$. Hal ini mengakibatkan $Ann^r(z) \subset Ann^r(bz)$. Kontradiksi dengan pengandaian $Ann^r(z)$ merupakan elemen maksimal di $\mathcal{I}$. Jadi, haruslah $A^{n+1} = 0$. Dengan kata lain, A merupakan ideal nilpoten.

Suatu ring R dikatakan ring Goldie kanan semiprima jika R merupakan ring Goldie kanan dan R merupakan ring semiprima. Selanjutnya akan diberikan sifat yang berlaku dalam ring Goldie semiprima.

Lemma 7 [2]

Jika R merupakan ring Goldie kanan semiprima maka R memenuhi kondisi rantai turun untuk anihilator kanan di R.

Bukti. Diambil sebarang anihilator kanan di R yaitu $A = Ann^r(X_1)$ dan $B = Ann^r(X_2)$ untuk suatu $X_1, X_2 \subseteq R$ dengan $A \subseteq B$. Akan ditunjukkan terlebih dahulu apabila $A \trianglelefteq_e R$ maka $A = B$. Diambil sebarang $b \in B$. Berdasarkan Lemma 2, terdapat $L \trianglelefteq_e R$ dengan $bL \subseteq A$. Jadi, $Ann^l(A)bL = 0$ dan $Ann^l(A)b \subseteq \zeta(R)$. Mengingat R merupakan ring Goldie semiprima, menurut Lemma 6 didapatkan $\zeta(R) = 0$ dan $Ann^l(A)b = 0$. Dari sini, didapatkan $b \in Ann^r(Ann^l(A)) = A$. Terbukti, $A = B$.

Diperhatikan bahwa jika $A \subseteq B$ maka terdapat suatu ideal kanan tak nol C_1 di B sedemikian sehingga $C_1 \cap A = 0$. Dari sini diperoleh $A \oplus C_1 \subseteq B$. Proses berlanjut apabila $A \oplus C_1 \subseteq B$, yaitu terdapat ideal kanan tak nol C_2 di B sedemikian sehingga $(A \oplus C_1) \cap C_2 = 0$. Diperoleh jumlahan langsung $A \oplus C_1 \oplus C_2$. Karena R merupakan ring Goldie, proses berlangsung hingga langkah ke-n dengan $A \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n = B$.

Selanjutnya akan dibuktian R memenuhi kondisi rantai turun untuk anihilator kanan di R. Andaikan R tidak memenuhi kondisi rantai turun untuk anihilator kanan di R yaitu terdapat rantai turun untuk anihilator kanan di R sebagai berikut

$$Ann^r(A_1) \supset Ann^r(A_2) \supset \ldots \supset Ann^r(A_n) \supset Ann^r(A_n) \supset \ldots.$$

dengan $A_i \subseteq R$ dengan $i \in R$. Didapatkan $Ann^r(A_1) = Ann^r(A_2) \oplus A_1$', $Ann^r(A_2) = Ann^r(A_3) \oplus A_2$',...,$Ann^r(A_n) =$

$Ann^r(A_{n+1}) \oplus A_n, \ldots$. Didapatkan jumlahan langsung $A_1, \oplus A_2, \oplus A_3, \oplus \ldots$ Hal ini mengakibatkan kontradiksi karena ring Goldie kanan. Terbukti, R memenuhi kondisi rantai turun untuk anihilator kanan di R.

Lemma 8 [6]

Jika R merupakan ring Goldie kanan semiprima, maka setiap ideal kanan tak nol di R bukan merupakan ideal nil kanan.

Bukti. Akan dibuktikan setiap ideal kanan tak nol bukan merupakan ideal nil kanan. Andaikan terdapat ideal kanan tak nol I di R yang merupakan ideal nil kanan. Misalkan $a \in I$ dengan $a \neq 0$. Dibentuk koleksi ideal-ideal kanan

$$\mathcal{I} = \{Ann^r(ra) | r \in R, ra \neq 0\}.$$

Dengan menggunakan fakta bahwa R memenuhi kondisi rantai naik anihilator kanan, didapatkan $\mathcal{I}$ memuat elemen maksimal. Misalkan $Ann^r(za)$ elemen maksimal dari $\mathcal{I}$. Diambil sebarang $x \in R$ berlaku $axz \in I$. Karena I merupakan ideal nil kanan, terdapat $n \in N$ sedemikian sehingga $(axz)^n = 0$. Akibatnya

$$(xza)^{n+1} = xz(axz)^n a = 0.$$

Artinya, xza merupakan elemen nilpoten. Misalkan k bilangan positif terkecil sedemikian hingga $(xza)^k = 0$ dan $(xza)^{k-1} \neq 0$. Diperhatikan bahwa

$$Ann^r(za) \subseteq Ann^r(xza)^{k-1}.$$

Dengan mengingat bahwa $Ann^r(za)$ elemen maksimal dari $\mathcal{I}$ diperoleh $Ann^r(za) = Ann^r(xza)^{k-1}$. Diperhatikan juga bahwa $xza \in Ann^r(xza)^{k-1}$. Disimpulkan $xza \in Ann^r(za)$, sehingga berlaku

$$za(xza) = (za)x(za) = 0.$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in R$, diperoleh $zaRza = 0$. Mengingat R merupakan ring semiprima, diperoleh $za = 0$. Kontradiksi dengan pengandaian $za \neq 0$. Terbukti, I bukan merupakan ideal nil kanan.

Lemma 9 [4]

Diberikan ring Goldie kanan semiprima R dan $I \subseteq R$. Jika I ideal kanan tak nol di R maka terdapat elemen tak nol $x \in I$ dengan $Ann^r(x) = Ann^r(x^2)$ dan $Ann^r(x) \cap xR = 0$.

Bukti. Diambil sebarang ideal kanan tak nol I di R. Menurut Lemma 10 diperoleh I bukan ideal nil. Artinya, terdapat $a \in I$ yang bukan merupakan elemen nilpoten yaitu untuk setiap $n \in$ berlaku $a^n \neq 0$. Diperhatikan bahwa

$$Ann^r(a) \subseteq Ann^r(a^2) \subseteq \ldots$$

Mengingat R merupakan ring Goldie kanan, berarti terdapat $n_0 \in N$ sedemikian hingga

$$Ann^r(a^n) = Ann^r(a^{n+1})$$

untuk setiap $n \geq n_0$. Selanjutnya untuk $x = a^n \in I$ berlaku $Ann^r(x) = Ann^r(x^2)$. Diambil sebarang $y = xr \in Ann^r(x) \cap xR$ dengan $r \in R$. Didapatkan $xy = x^2 r = 0$. Akibatnya $r \in Ann^r(x^2) = Ann^r(x)$ dan $y = xr = 0$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $Ann^r(x) \cap xR = 0$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dalam ring Goldie kanan semiprima berlaku suatu elemen reguler satu sisi merupakan elemen reguler.

Proposisi 4 [4]

Diketahui R merupakan ring Goldie kanan semiprima. Jika $Ann^r(a) = 0$ maka $Ann^l(a) = 0$.

Bukti. Diketahui $Ann^r(a) = 0$. Berdasarkan Lemma 4 diperoleh $aR \trianglelefteq_e R$. Diambil sebarang $x \in Ann^l(a)$. Diperhatikan bahwa $x(aR) = 0$, yang berarti $x \in \zeta(R)$. Menurut Lemma 6, didapatkan $\zeta(R)$ merupakan ideal nilpoten. Karena R merupakan ring semiprima, diperoleh $\zeta(R) = 0$. Dari sini, didapatkan $x = 0$ dan $Ann^l(a) = 0$. Terbukti, a merupakan elemen reguler.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap ideal kanan esensial dalam suatu ring Goldie semiprima memuat elemen reguler.

Lemma 10 [6]

Diberikan ring Goldie kanan semiprima R. Jika $I \trianglelefteq_e R$ maka I memuat suatu elemen reguler.

Bukti. Diambil sebarang $I \trianglelefteq_e R$. Karena R merupakan ring Goldie kanan semiprima, berdasarkan Lemma 11 terdapat $a_1 \in I$ sedemikian hingga $Ann^r(a_1) = Ann^r(a_1^2)$ dan $Ann^r(a_1) \cap a_1R = 0$. Jika $I \cap Ann^r(a_1) = 0$, maka diperoleh $Ann^r(a_1) = 0$. Menurut Proposisi 4 dapat dipilih a_1 sebagai elemen reguler. Jika $I \cap Ann^r(a_1) \neq 0$ maka dengan memanfaatkan Lemma 11 diperoleh terdapat $a_2 \in I \cap Ann^r(a_1)$ dengan $Ann^r(a) = Ann^r(a^2)$ dan $Ann^r(a_2) \cap a_2R = 0$. Proses dilanjutkan apabila $I \cap Ann(a_1)^r \cap Ann^r(a_2) \neq 0$, yaitu terdapat $a_3 \in I \cap Ann(a_1)^r \cap Ann^r(a_2)$ dengan $Ann^r(a_3) = Ann^r(a_3^2)$ dan $Ann^r(a_3) \cap a_3R = 0$. Dengan cara yang sama pada langkah ke-n diperoleh barisan diperoleh barisan $a_1, a_2, \ldots a_n \in R$ dengan $a_i \in Ann^r(a_j)$ untuk setiap $i > j$.

Selanjutnya dengan menggunakan induksi akan dibuktikan bahwa pada setiap langkah ke-n didapatkan jumlahan langsung $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR$. Untuk $n = 1$, jelas bahwa a_1R merupakan jumlahan langsung. Misalkan untuk $n = k$ berlaku $a_1R + a_2R + a_kR$ merupakan jumlahan langsung. Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$ berlaku $a_1R + a_2R + a_kR + a_{k+1}R$ merupakan jumlahan langsung. Diambil sebarang $z \in a_{k+1}R \cap a_1R + a_2R + \ldots + a_kR$. Artinya

$$z = a_{k+1}r_{k+1} = a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_kr_k.$$

Dengan mengingat fakta bahwa $a_2, a_3, \ldots, a_{k+1} \in Ann^r(a_1)$, berlaku $a_1^2r_1 = 0$. Didapatkan $r_1 \in Ann(a_1^2) = Ann(a_1)$ dan $a_1r_1 = 0$. Dari sini, diperoleh

$$a_{k+1}r_{k+1} = a_2r_2 + \ldots + a_kr_k.$$

Diperhatikan juga bahwa $a_3, a_4, \ldots, a_{k+1} \in Ann^r(a_2)$, sehingga berlaku $a_2^2r_2 = 0$. Artinya, $r_2 \in Ann^r(a_2^2) = Ann^r(a_2)$ dan $a_2r_2 = 0$. Dari sini, diperoleh

$$a_{k+1}r_{k+1} = a_3r_3 + \ldots + a_kr_k.$$

Proses yang sama dilakukan hingga didapatkan $a_{k+1}r_{k+1} = 0$. Jadi, $a_{k+1}R \cap a_1R + a_2R + a_kR = 0$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa

$$a_iR \cap (a_1R + a_2R + \ldots + a_{i-1}R + a_{i+1}R + \ldots a_{k+1}R) = 0$$

untuk setiap $i = 1,2, \ldots, k$. Diambil sebarang $x \in a_iR \cap \sum_{j \neq i} a_jR$. Misalkan

$$x = a_ir_i = a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_{i-1}r_{i-1} + a_{i+1}r_{i+1} + \ldots + a_{k+1}r_{k+1}$$

untuk suatu $r_i \in R$. Jadi, $a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_{i-1}r_{i-1} - a_ir_i + a_{i+1}r_{i+1} + \ldots + a_kr_k = -a_{k+1}r_{k+1}$ dan $a_{k+1}r_{k+1} = 0$. Akibatnya $a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_{i-1}r_{i-1} - a_ir_i + a_{i+1}r_{i+1} + \ldots + a_kr_k = 0$. Karena diasumsikan $a_1R + a_2R + \ldots + a_kR$ merupakan jumlahan langsung, diperoleh $x = a_ir_i = 0$. Jadi, dapat disimpulkan $a_1R + a_2R + \ldots + a_kR + a_{k+1}R$ merupakan jumlahan langsung.

Dengan demikian untuk setiap langkah ke-n, didapatkan jumlahan langsung $a_1R \oplus a_R \oplus \ldots \oplus a_nR$ dengan $a_i \in Ann^r(a_j)$ untuk setiap $i < j$. Dengan menggunakan fakta bahwa R merupakan ring Goldie prima kanan, proses akan berlangsung sampai langkah ke$-n$ dengan $I \cap Ann(a_1)^r \cap Ann^r(a_2) \ldots \cap Ann^r(a_n) = 0$.

Selanjutnya dipilih $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Akan dibuktikan s merupakan elemen reguler di R. Diambil sebarang $y \in Ann^r(s)$, yang berarti $sy = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)y = 0$. Dengan mengalikan a_1 pada kedua ruas diperoleh $a_1^2y + a_1a_2y + \ldots + a_1a_ny = 0$. Karena $a_2, \ldots, a_n \in Ann^r(a_1)$, diperoleh $a_1^2y = 0$. Didapatkan $y \in Ann^r(a_1^2) = Ann^r(a_1)$ dan $a_2y + \ldots + a_ny = 0$. Kemudian pada kedua ruas dikalikan a_2, didapatkan $a_2a_1^2y + a_2^2y + a_2a_3y + \ldots + a_2a_ny = 0$. Karena $a_3, a_4, \ldots, a_n \in Ann^r(a_2)$ dan $y \in Ann^r(a_1)$ diperoleh $a_2^2y = 0$. Akibatnya $y \in Ann^r(a_2^2) = Ann^r(a_2)$ dan $y \in Ann^r(a_1) \cap Ann^r(a_2)$. Dengan cara yang sama dapat pula ditunjukkan bahwa $y \in Ann^r(a_1) \cap Ann^r(a_2) \cap \ldots \cap Ann^r(a_n)$. Jadi, $Ann^r(s) \subseteq An^r(a_1) \cap Ann^r(a_2) \cap \ldots \cap Ann^r(a_n)$. Karena $I \cap Ann^r(a_1) \cap Ann^r(a_2) \cap \ldots \cap Ann^r(a_n) = 0$, diperoleh $I \cap Ann^r(s) = 0$. Mengingat $I \trianglelefteq_e R$, haruslah $Ann^r(s) = 0$. Menurut Proposisi 4 diperoleh bahwa $Ann^l(s) = 0$. Jadi, terbukti s merupakan elemen reguler dan I memuat elemen reguler.

Adapun sifat yang berlaku pada ring Goldie yaitu ring Goldie kanan sekaligus ring Goldie kiri sebagai berikut.

Proposisi 5 [4]
Misalkan R merupakan ring Goldie prima dan $I \subseteq R$. Jika I merupakan ideal tak nol di R maka I memuat elemen reguler.

Bukti. Misalkan I merupakan ideal tak nol di R. Akan ditunjukkan I memuat suatu elemen reguler. Dalam hal ini akan ditunjukkan $I \trianglelefteq_e R$, sehingga berdasarkan Lemma 12 diperoleh I memuat elemen reguler. Diambil sebarang ideal kanan J di R sedemikian sehingga $I \cap J = 0$. Diperhatikan bahwa $JI \subseteq I \cap J = 0$. Hal ini mengakibatkan $R(JI) = (RJ)I = 0$. Mengingat R merupakan ring prima, didapatkan $RJ = 0$ dan $RJR = 0$. Didapatkan $J = 0$. Jadi, diperoleh $I \trianglelefteq_e R$. Akibatnya I memuat elemen reguler.

3.2. Ring Hasil Bagi Klasik Dan Order

Definisi 18 [5]

Diberikan ring R dan $C_R(0)$ himpunan semua elemen reguler di R. Ring hasil bagi dari R oleh $C_R(0)$ (jika ada) disebut sebagai ring hasil bagi klasik. Lebih lanjut, ring hasil bagi klasik suatu ring R oleh $C_R(0)$ dinotasikan dengan $Q(R)$ [5]. Diketahui bahwa jika R merupakan daerah integral maka $Q(R)$ merupakan lapangan dengan monomorfisma dari ring R ke $Q(R)$. Hal tersebut juga berlaku apabila daerah integral diperumum menjadi ring dengan elemen satuan yang akan dijelaskan pada Teorema berikut.

Teorema 3 [6]

Diberikan suatu ring R dengan elemen satuan. Jika $Q(R)$ ada, maka homomorfisma ring θ yang bersesuaian bersifat injektif.

Diperhatikan $\ker(\theta) = \{r \in R \mid (\exists s \in C_R(0))\ rs = 0\}$. Karena $C_R(0)$ himpunan semua elemen reguler di R, haruslah $\ker(\theta) = \{0\}$. Akibatnya, θ bersifat injektif.

Diberikan suatu ring Q dengan elemen satuan. Misalkan Q merupakan ring hasil bagi dari R oleh $C_R(0)$. Jelas bahwa R merupakan subring di Q. Di sisi lain, Q juga merupakan subring dari dirinya sendiri. Hal ini memunculkan pertanyaan syarat apa yang diperlukan agar Q sendiri merupakan ring hasil bagi dari Q oleh $C_Q(0)$. Berikut syarat cukup tersebut akan diberikan dalam Teorema berikut.

Teorema 4 [6]
Diberikan suatu ring Q dengan elemen satuan. Jika setiap elemen di $C_Q(0)$ merupakan unit di Q, maka ring Q menjadi ring hasil bagi kanan dari dirinya sendiri (oleh $C_Q(0)$).

Dipilih $\theta: Q \to Q$ fungsi satuan pada Q.

1. Jelas bahwa $(\forall s \in C_Q(0))$ s merupakan unit di Q.
2. Jika $q \in Q$, dapat dipilih $r = q \in Q$ dan $s = 1 \in C_Q(0)$ sedemikian hingga $rs^{-1} = r \cdot 1 = r = q$.
3. Karena θ fungsi satuan, jelas bahwa $\ker(\theta) = \{0\} = \{r \in R \mid (\exists s \in S)\ rs = 0\}$.

Jadi, Q merupakan ring hasil bagi kanan dari dirinya sendiri, dengan fungsi identitas menjadi homomorfisma yang bersesuaian.

Dari teorema di atas, muncul definisi berikut.

Definisi 19 [6]

Suatu ring Q yang memiliki elemen satuan disebut **ring hasil bagi** jika semua elemen reguler di Q merupakan unit di Q.

Selanjutnya, jika Q merupakan ring hasil bagi, jelas terdapat subring R dari Q sedemikian hingga Q merupakan ring hasil bagi kanan dari R oleh suatu subset $C_R(0)$, yaitu $R = Q$ itu sendiri. Dari sini, muncul konsep order.

Definisi 20 [7]

Diberikan suatu ring hasil bagi Q.

4. Suatu subring R di Q disebut **order kanan** di dalam Q apabila Q merupakan ring hasil bagi kanan klasik dari R.
5. Suatu subring R di Q disebut **order kiri** di dalam Q apabila Q merupakan ring hasil bagi kiri klasik dari R.
6. Suatu subring R di Q disebut **order** di dalam Q jika R merupakan order kiri sekaligus order kanan di Q.

Berikut akan dibuktikan ring Artin kanan merupakan kejadian khusus dari ring hasil bagi.

Proposisi 6 [6]

Bukti

Diberikan suatu ring Q. Jika ring Q merupakan ring Artin kanan (kiri) maka Q merupakan ring hasil bagi.

Ambil sebarang $s \in C_Q(0)$. Dibentuk rantai turun ideal kanan $\{s^n Q\}$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Katakan $k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $s^k Q = s^{k+1}Q$. Karena $1 \in Q$ elemen satuan, diperoleh bahwa $s^k \in s^k Q = s^{k+1}Q$. Akibatnya terdapat $q \in Q$ sedemikian hingga $s^k = s^{k+1}q$. Didapat bahwa $s^k(sq-1) = 0$. Karena $s^k \in C_Q(0)$, didapat $sq = 1$. Diperhatikan pula bahwa $s(qs-1) = (sq-1)s = 0$. Akibatnya $qs = 1$, sehingga $q = s^{-1}$. Jadi, s merupakan unit.

Berikut akan diberikan hubungan antara ring Goldie prima dan order dalam suatu ring hasil bagi sebagai berikut.

Teorema 5 [6]

Jika R merupakan ring Goldie prima maka R merupakan order dalam suatu ring sederhana $Q(R)$.

Bukti

Terlebih dahulu akan ditunjukkan eksistensi dari ring hasil bagi klasik $Q(R)$ dari R oleh $C_R(0)$. Menurut Teorema 1, perlu dibuktikan $C_R(0)$ merupakan himpunan penyebut kanan yaitu reversibel kanan dan Ore kanan. Karena himpunan $C_R(0)$ reversibel kanan, maka tinggal dibuktikan himpunan $C_R(0)$ memenuhi kondisi Ore kanan. Diambil sebarang $a \in R,$ dan $s \in C_R(0)$. Dibentuk himpunan

$$I = \{r \in R | ar \in sR\}.$$

Himpunan $I \neq \emptyset$, karena terdapat $0 \in R$ dengan $ar = 0 \in sR$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dan $y \in R$ berlaku $a(x_1 - x_2) = ax_1 - ax_2 \in sR$ dan $a(x_1 y) = (ax_1)y \in sR$. Jadi, himpunan I merupakan ideal kanan di R. Selanjutnya akan ditunjukkan $I \trianglelefteq_e R$.

Diambil sebarang ideal kanan tak nol J di R. Kasus pertama untuk $aJ = 0$. Artinya, $J \subseteq I$ dan $I \cap J \neq 0$. Kasus kedua untuk $aJ \neq 0$. Diketahui bahwa s merupakan elemen reguler di R. Menurut Lemma 4 diperoleh $sR \trianglelefteq_e R$. Akibatnya terdapat $aj \in aJ \cap sR$ dengan $aj \neq 0$ untuk suatu $j \in J$. Dari sini, diperoleh $j \in I$ dan $I \cap J \neq 0$. Jadi, terbukti $I \trianglelefteq_e R$. Menurut Lemma 12, ideal kanan I memuat suatu elemen reguler, katakan $s_1 \in I$. Artinya, $as_1 \in sR$ yaitu $as_1 = sr$ untuk suatu $r \in R$. Diperoleh $C_R(0)$ memenuhi kondisi Ore kanan. Akibatnya dapat dibentuk suatu ring hasil bagi klasik kanan $Q(R)$ oleh $C_R(0)$. Dengan kata lain ring R merupakan order kanan di ring hasil bagi $Q(R)$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $Q(R)$ merupakan ring Artin kanan. Dalam hal ini akan ditunjukkan $Q(R)$ merupakan ring semisederhana kanan, sehingga berdasarkan Lemma 1 diperoleh $Q(R)$ merupakan ring Artin kanan. Misalkan $I \trianglelefteq_e Q(R)$. Menurut Proposisi 3 dan Lemma 12 diperoleh $I \cap R \trianglelefteq_e R$ dan I memuat suatu elemen reguler di R. Dengan kata lain I memuat elemen unit di $Q(R)$ akibatnya $I = Q(R)$. Jadi, satu-satunya ideal kanan esensial di $Q(R)$ hanyalah $Q(R)$. Dengan menggunakan Lemma 3, diperoleh $Q(R)$ merupakan ring semisederhana kanan.

Lebih lanjut akan ditunjukkan bahwa $Q(R)$ merupakan ring sederhana. Diambil sebarang I ideal tak nol di $Q(R)$. Menurut Proposisi 3, haruslah diperoleh $I \cap R$ ideal di R. Berdasarkan Lemma 12, berlaku $I \cap R$ memuat elemen reguler . Diperhatikan bahwa I memuat elemen unit di $Q(R)$, sehingga berlaku $I = Q(R)$. Dengan demikian diperoleh $Q(R)$ merupakan ring sederhana.

Dengan analog, dapat pula ditunjukkan jika ring R merupakan ring Goldie kiri prima maka R merupakan order kiri dalam suatu ring Artin kiri sederhana $Q(R)$.

Lebih lanjut, jika R merupakan ring Goldie prima yaitu ring Goldie kanan sekaligus ring Goldie kiri maka R merupakan order kanan dalam suatu ring Artin kanan sederhana $Q(R)^r$ dan R merupakan order kiri dalam suatu ring Artin kiri sederhana $Q(R)^l$. Menurut Teorema 2 didapatkan $Q(R)^r \simeq Q(R)^l$. Oleh karena itu diperoleh, jika R ring Goldie prima maka R merupakan order dalam suatu ring Artin sederhana $Q(R)$.

3. Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari penelitian ini sebagai berikut.

1. Diberikan R ring Goldie prima. Berlaku
   i. Setiap ideal esensial kanan (kiri) memuat elemen reguler;
   ii. Setiap ideal tak nol di R maka I memuat elemen reguler.
2. Jika R ring Goldie prima maka R merupakan order dalam suatu ring Artin sederhana $Q(R)$.

Daftar Pustaka

Bland, P.E. (2011). *Rings and Their Modules*. Berlin/New York: Walter de Gruyter GmbH dan Co. KG.

Chatters, A.W. & Hajarnavis, C. (1980). *Rings with Chain Conditions*. Vol. 44. London: Pitman.

Goodearl, K. R., Warfield, Jr, R.B. (2004). An *Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. New York: Cambridge University Press.

Lam, T.Y. (1999). *Lectures on Modules and Rings*. New York: Springer-Verlag.

Marubayashi, H., & Ueda, A. (2018*). Projective Ideals of Differential Polynomial Rings over HNP Rings*. Proceeding of the International Conference held at Aligarth Muslim University, India.

McConnell, J. C. Robson, J. C. (2001). *Noncommutative Noetherian Rings.* New York: Wiley.

Stenström, B. (1975). *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory*. New York: Springer-Verlag

Wahyuni, S., Wijayanti, I.E., Yuwaningsih, D.A., dan Hartanto, A.D. (2016). *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. London: Gordon and Breach Science Publishers.