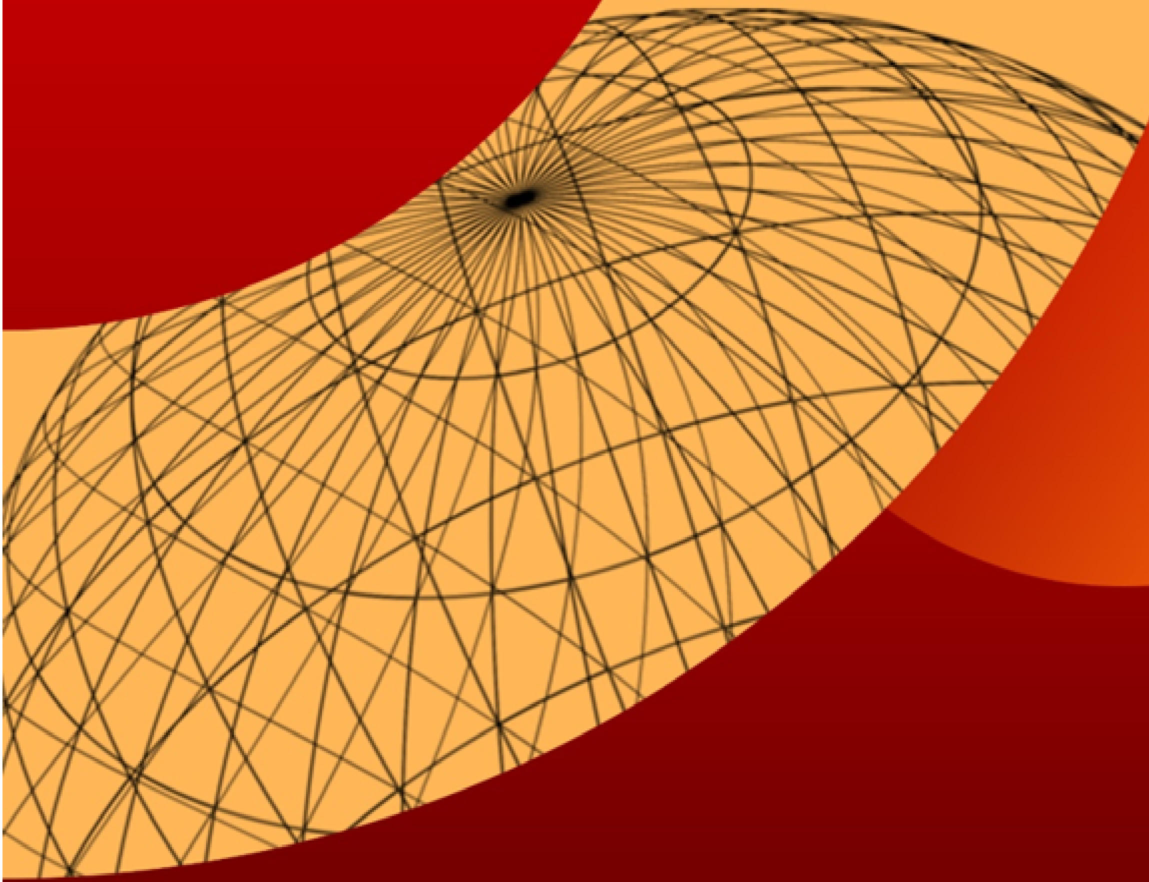
April 2024
Volume 5 Nomor 1

p-ISSN 2723-0325 e-ISSN 2723-0333



TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PATTIMURA

is an international academic open-access journal that gains a foothold in mathematics and its applications issued twice a year. The focus is to publish original research and review articles on all aspects of pure and applied Mathematics. Editorial board members of the Journal and reviewers will review submitted papers. All submitted articles should report original, previously unpublished research results, experimental or theoretical, and will be peer-reviewed. Articles submitted to the journal should meet these criteria and must not be under consideration for publication elsewhere. Manuscripts should follow the Template of the journal and are subject to both review and editing.

Published by:

Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University.
Ambon
2024

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal
Volume 5 Number 1 | April 2024

Publisher
Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University, Ambon, Indonesia

Editorial Address
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Unversitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon 97233, Provinsi Maluku, Indonesia
Contact : +62 82397854220
Email : tensormathematics@gmail.com

Volume 5 Number 1 | April 2024

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal

TENSOR Pure and Applied Mathematics Journal

April 2024 | Vol. 5 | No. 1 Halaman 33–48

p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

Algebra Hyperstructure Concept and Its Application on Oxidation Reduction Reaction: Actinium (Ac) and Berkelium (Bk)

Elsa Huwae[1] Henry W. M. Patty[2] Dorteus L. Rahakbauw[3] Novita Dahoklory[4]

[1,3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura

[2,4] Divisi Aljabar dan Analisis FMIPA Universitas Pattimura

*Email: huwaeelsa7@gmail.com

Manuscript submitted : Januari 2024;
Accepted for publication : April 2024.
doi: https://doi.org/10.30598/tensorvol1iss1pp33-48

Abstrack: The concept of algebraic hyperstructure is a generalization of the concept of algebraic structure. The algebraic hyperstructure concepts discussed in this research include hypergroups, semihypergroups, and H_v-group and it is known that this concept has application in the field of science, one of which in the field of chemistry, namely redox reactions. The aim of this research is to discuss the concept of algebraic hyperstructures and its application in redox reactions of the elements actinium (Ac) and berkelium (Bk). In this research, the redox reactions of the elements actinium and berkelium were obtained and the results of the redox reactions of these two elements formed a semihypergroups and H_v-semigroups.

Keywords: *Hypergroups, Semihypergroups, H_v-semigroups, Redox Reactions*.

1. Pendahuluan

Grup merupakan suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi beberapa aksioma tertentu. Suatu grup G dengan operasi biner $*$ yang selanjutnya dinotasikan dengan $(G,*)$ merupakan salah satu topik kajian dalam struktur aljabar yang dapat dikembangkan walaupun awalnya dianggap sebagai kajian yang bersifat abstrak. Hal ini dimaksudkan karena operasi biner pada himpunan tak kosong tanpa harus memenuhi aksioma grup memungkinkan kajian teori himpunan mengalami perkembangan dengan sifat yang lebih lemah (umum) dari teori grup hingga permasalahan yang terjadi dalam bidang ilmu lainnya dapat dijelaskan dengan menggunakan pendekatan konsep himpunan (grup) tersebut.

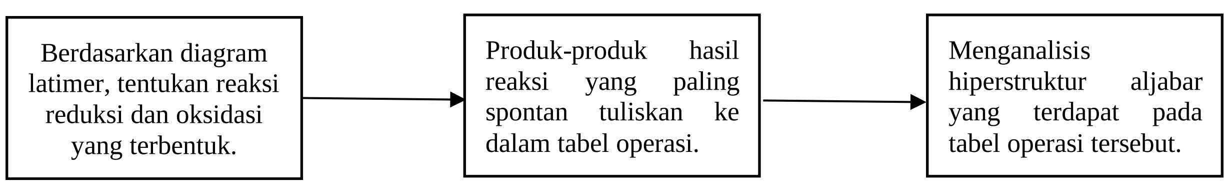
Salah satu struktur yang dapat dikembangkan dalam teori grup adalah hipergrup. Konsep hipergrup ini diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan Perancis F. Marty pada tahun 1934. Suatu hipergrup merupakan suatu himpunan tak kosong H yang dilengkapi dengan hiperoperasi $(\circ)$ yaitu $\circ: H \times H \longrightarrow P^*(H)$ dengan $P^*(H)$ adalah koleksi dari semua sub himpunan tak kosong dari H $(P^*(H) = P(H) \backslash \emptyset)$. Hipergrup merupakan perumuman dari grup konvensional. Jika pada grup konvensional, hasil operasi antara dua elemen menghasilkan suatu elemen pada himpunan yang sama maka pada hipergrup hasil operasi antara dua elemen menghasilkan subhimpunan tak kosong dari himpunan tersebut.

Dalam konsep hipergrup, terdapat beberapa sifat yang harus dipenuhi, salah satunya adalah sifat asosiatif. Sifat asosiatif dari konsep hipergrup ternyata dapat diperlemah atau diperumum sehingga berkembangnya suatu konsep yaitu grup-H_V yang diperkenalkan oleh T. Vougiouklis pada tahun 1990.

Karena sifat-sifat yang lemah dalam konsep hipergrup dan grup-H_v sehingga kedua konsep ini memiliki aplikasi dalam beberapa bidang sains yaitu pada bidang kimia khususnya dalam menganalisis reaksi redoks (reduksi oksidasi).

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian literatur. Pertama ditentukan reaksi reduksi dan oksidasi yang terbentuk berdasarkan diagram Latimer yang diberikan, selanjutnya produk-produk reaksi tersebut dituliskan dalam bentuk tabel operasi. Terakhir, dianalisis hiperstruktur aljabar berdasarkan tabel operasi tersebut. Berikut adalah diagram tahap penelitian untuk memperjelas penelitian ini.



3. Hasil dan Pembahasan

Reaksi redoks adalah reaksi kimia dimana terjadi transfer elektron antara dua spesi kimia. Reaksi reduksi merupakan reaksi dimana suatu spesi kimia menerima satu atau lebih elekton. Contohnya dalam reaksi:

$$Cu^{2+}\,(aq) + 2e^- \longrightarrow Cu(s)$$

Ion tembaga positif (Cu^{2+}) menerima dua elektron dan berubah menjadi tembaga (Cu) yang netral. Dalam reaksi ini, Cu^{2+} mengalami reduksi karena bilangan oksidasi yang awalnya +2 (Cu^{2+}) menjadi 0 (Cu).
Sedangkan reaksi oksidasi merupakan reaksi dimana suatu spesi kehilangan satu atau lebih elektron. Contohnya dalam reaksi:

$$Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$$

Zinc (Zn) kehilangan dua elektron dan berubah menjadi ion zinc positif (Zn^{2+}) . Dalam reaksi ini, zinc mengalami oksidasi karena bilangan oksidasi zinc awalnya 0 (Zn) menjadi +2 (Zn^{2+}).

Selanjutnya, reaksi redoks dapat dituliskan dalam setengah reaksi. Reaksi redoks yang dituliskan dalam setengah reaksi memiliki potensial sel (E) yang mana potensial sel merupakan hasil penjumlahan dari potensial setengah reaksi reduksi dengan potensial setengah reaksi oksidasi. Jika $E \geq 0$, maka reaksi tersebut spontan atau dapat berlangsung, sebaliknya jika $E < 0$ maka reaksi tersebut tidak spontan. Sebagai contoh, reaksi redoks Cu^{3+} dan Cu^{+}:

$$Cu^{3+} + Cu^{+} \longrightarrow Cu^{2+}$$

Reaksi redoks diatas dapat ditulis menjadi dua buah setengah reaksi sebagai berikut:

1.1 $Cu^{3+} + e \longrightarrow Cu^{2+}$ (2.4 V)

2.1 $Cu^{+} \longrightarrow Cu^{2+} + e$ (0.153)

Sehingga $E = 2.4 + 0.153 = 2.553$, karena $E > 0$ maka reaksi ini merupakan reaksi spontan.

3.1 Potensial Reduksi Standar Untuk Unsur Dengan Tiga Bilangan Oksidasi

Bentuk diagram latimer untuk unsur dengan tiga bilangan oksidasi adalah sebagai berikut:

$$x \qquad A \longrightarrow_{\alpha} y \qquad B \longrightarrow_{\beta} \quad z\, C$$

Gambar 1. Diagram Latimer unsur dengan tiga bilangan oksidasi

dengan A, B dan C adalah spesi kimia dan x, y dan z merupakan bilangan oksidasi dari spesi A, B dan C yang tereduksi atau teroksidasi. Diketahui $m = x - y$ dan $n = y - z$ adalah selisih bilangan oksidasi, dan α, β dan γ merupakan potensial reduksi standar antara A, B dan C. Selanjutnya semua kemungkinan reaksi redoks dari tiga spesi kimia disajikan pada tabel berikut:

Tabel 1. Semua kemungkinan reaksi redoks dari tiga spesi kimia

	A	b	c
A	$A + A$ (0)	$B + A$ $(\alpha - \alpha = 0)$ $C + A$ $(-\alpha + \gamma)$	$B + A$ $(\alpha - \gamma)$ $B + B$ $(\alpha - \beta)$ $C + A$ $(\gamma - \gamma = 0)$ $C + B$ $(\gamma - \beta)$
B		$A + C$ $(-\alpha + \beta)$ $B + B$ (0)	$C + A$ $(\beta - \gamma)$ $C + B$ $(\beta - \beta = 0)$
C			$C + C$ (0)

3.2 Potensial Reduksi Standar Untuk Unsur Dengan Empat Bilangan Oksidasi

Diagram Latimer suatu unsur dengan empat bilangan oksidasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D \longrightarrow_{\alpha} C \longrightarrow_{\beta} B \longrightarrow_{\gamma} A$$

Adapun perhitungan potensial reduksi standar dari diagram di atas sebagai berikut:

(1) $D \longrightarrow B,\ E_1 = \frac{\alpha n_1 + \beta n_2}{n_1 + n_2},$ (i)

(2) $D \longrightarrow A,\ E_2 = \frac{\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3}{n_1 + n_2 + n_3},$ (ii)

(3) $C \longrightarrow A,\ E_3 = \frac{\beta n_2 + \gamma n_3}{n_2 + n_3}.$ (iii)

dengan:

E_1, E_2, dan E_3	= Potensial reduksi standar (dalam volt),
D, C, B, dan A	= Spesi kimia dari sebarang unsur S,
α, β, dan γ	= Potensial reduksi standar antara D, C, B, dan A,
n_1	= Selisih elektron antara D dan C,
n_2	= Selisih elektron antara C dan B,
n_3	= Selisih elektron antara B dan A.

Selanjutnya, diketahui $H = \{A, B, C, D\}$, dengan $A, B, C,$ dan D adalah spesi kimia dari sebarang unsur H, dan untuk kasus $\alpha > \gamma > \beta$ jelas bahwa:

$$\beta < E_1 < \alpha, \quad \beta < E_2 < \alpha, \quad \beta < E_3 < \gamma.$$

Semua kemungkinan kombinasi reaksi redoks spontan sebarang unsur H adalah sebagai berikut:

$A + A \longrightarrow A + A\ [0]$

$A + B \longrightarrow \{C + A\ \ [\gamma - E_3]\ B + A\ \ [0]$

$A + C \longrightarrow C + A\ \ [0]$

$A + D \longrightarrow \{B + C\ \ [\alpha - \gamma]\ B + B\ \ [E_1 - \gamma]\ B + A\ \ [E_2 - \gamma]\ C + C\ \ [\alpha - E_3]\ D + C\ \ [\alpha - E_2]\ D + A\ \ [0]$

$B + B \longrightarrow \{B + B\ \ [0]\ A + C\ \ [-\beta + \gamma]$

$B + C \longrightarrow \{C + B\ \ [0]\ C + A\ \ [-\beta + E_3]$

$B + D \longrightarrow \{C + C\ \ [-\beta + \alpha]\ C + B\ \ [-\beta + E_1]\ C + A\ \ [-\beta + E_2]\ D + C\ \ [\alpha - E_1]\ D + B\ \ [0]$

$C + C \longrightarrow C + C\ \ [0]$

$C + D \longrightarrow D + C\ \ [0]$

$D + D \longrightarrow D + D\ \ [0]$

3.3 Reaksi Redoks Unsur Aktinium (Ac) Sebagai Penerapan Konsep Hiperstruktur Aljabar

Unsur Aktinium (Ac) adala unsur kimia dalam tabel periodik dengan nomor atom 89, dan termasuk dalam golongan aktinida. Berikut ini diagram Latimer unsur aktinium.

$$+3 \qquad Ac^{3+} \longrightarrow_{-4.9} +2 \qquad Ac^{2+} \longrightarrow_{-0.7} 0\ Ac$$

Misalkan $U = \{Ac^{3+},\ Ac^{2+}, Ac\}$ maka semua kombinasi reaksi redoks U yaitu:

$Ac^{3+} + Ac^{3+} \longrightarrow Ac^{3+} + Ac^{3+}$ (0)

$Ac^{3+} + Ac^{2+} \longrightarrow \{Ac^{2+} + Ac^{3+}$ (0) $\quad Ac + Ac^{3+}$ (2.8)

$Ac^{3+} + Ac \longrightarrow \{Ac^{2+} + Ac^{3+}$ (−2.8) $Ac^{2+} + Ac^{2+}$ (−4.2) $Ac + Ac^{3+}$ (0) $Ac + Ac^{2+}$ (−1.4)

$Ac^{2+} + Ac^{2+} \longrightarrow \{Ac^{3+} + Ac$ (4.2) $Ac^{2+} + Ac^{2+}$ (0)

$Ac^{2+} + Ac \longrightarrow \{Ac + Ac^{3+}$ (1.4) $Ac + Ac^{2+}$ (0)

$Ac + Ac \longrightarrow Ac + Ac$ (0)

Selanjutnya, untuk setiap $a, b \in U$, didefinisikan hiperoperasi " $\oplus_1$ " pada U sebagai berikut: $a \oplus_1 b = c$ dengan c adalah produk reaksi redoks spontan dengan potensial sel terbesar yang terjadi antara a dan b. Sehingga, reaksi redoks U disajikan pada tabel berikut:

Tabel 2. Reaksi Reaksi Redoks U

$\oplus_1$	Ac^{3+}	Ac^{2+}	Ac
Ac^{3+}	Ac^{3+}	Ac, Ac^{3+}	Ac, Ac^{3+}
Ac^{2+}	Ac, Ac^{3+}	Ac, Ac^{3+}	Ac, Ac^{3+}
Ac	Ac, Ac^{3+}	Ac, Ac^{3+}	Ac

Berdasarkan Tabel 2, dapat dimisalkan $U = \{x, y, z\}$ dengan $x = Ac, y = Ac^{2+}$ dan $z = Ac^{3+}$ dengan hiperoperasi $\oplus_1$ pada U, sehingga Tabel 2 dapat ditulis sebagai berikut:

Tabel 3. Tabel Operasi $(U, \oplus_1)$

$\oplus_1$	x	y	z
x	$\{x\}$	$\{x, z\}$	$\{x, z\}$
y	$\{x, z\}$	$\{x, z\}$	$\{x, z\}$
z	$\{x, z\}$	$\{x, z\}$	$\{z\}$

Teorema 1. Misalkan $U = \{x, y, z\}$ dengan $x = Ac, y = Ac^{2+}$ dan $z = Ac^{3+}$ dengan hiperoperasi $\oplus_1$ pada U, maka $(U, \oplus_1)$ merupakan semihipergrup.

Bukti.

Akan ditunjukan bahwa $(U, \oplus_1)$ bersifat asosiatif yang dibagi menjadi beberapa kasus berikut:

(i). Untuk $s = x, t = x, u = x$, dengan $x \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$\begin{aligned} x \oplus_1 (x \oplus_1 x) &= x \oplus_1 x \\ &= \{x\} \\ (x \oplus_1 x) \oplus_1 x &= x \oplus_1 x \\ &= \{x\} \end{aligned}$$

(ii). Untuk $s = y, t = y, u = y$, dengan $y \in U$ akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$y \oplus_1 (y \oplus_1 y) \quad = \cup\, y \oplus_1 x, z$

$= y \oplus_1 x \cup y \oplus_1 z$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(y \oplus_1 y) \oplus_1 y \quad = \cup\, x, z \oplus_1 y$

$= x \oplus_1 y \cup z \oplus_1 y$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(iii). Untuk $s = z, t = z, u = z$, dengan $z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$z \oplus_1 (z \oplus_1 z) \quad = z \oplus_1 z$

$= \{z\}$

$(z \oplus_1 z) \oplus_1 z \quad = z \oplus_1 z$

$= \{z\}$

(iv). Untuk $s = y, t = x, u = x$ dengan $x, y \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$y \oplus_1 (x \oplus_1 x) \quad = y \oplus_1 x$

$= \{x, z\}$

$(y \oplus_1 x) \oplus_1 x \quad = \cup\, x, z \oplus_1 x$

$= x \oplus_1 x \cup z \oplus_1 x$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(v). Untuk $s = z, t = x, u = x$, dengan $x, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$z \oplus_1 (x \oplus_1 x) \quad = z \oplus_1 x$

$= \{x, z\}$

$(z \oplus_1 x) \oplus_1 x \quad = \cup\, x, z \oplus_1 x$

$= x \oplus_1 x \cup z \oplus_1 x$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(vi). Untuk $s = x, t = y, u = x$, dengan $x, y \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$x \oplus_1 (y \oplus_1 x) \quad = \cup\, x \oplus_1 x, z$

$= x \oplus_1 x \cup x \oplus_1 z$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(x \oplus_1 y) \oplus_1 x \quad = \cup\, x, z \oplus_1 x$

$= x \oplus_1 x \cup z \oplus_1 x$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(vii). Untuk $s = x, t = z, u = x$, dengan $x, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$x \oplus_1 (z \oplus_1 x) \quad = \cup\, x \oplus_1 x, z$

$= x \oplus_1 x \cup x \oplus_1 z$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(x \oplus_1 z) \oplus_1 x \quad = \cup\, x, z \oplus_1 x$

$= x \oplus_1 x \cup z \oplus_1 x$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(viii). Untuk $s = x, t = x, u = y$, dengan $x, y \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$x \oplus_1 (x \oplus_1 y) \quad = \cup\, x \oplus_1 x, z$

$= x \oplus_1 x \cup x \oplus_1 z$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(x \oplus_1 x) \oplus_1 y \quad = x \oplus_1 y$

$= \{x, z\}$

(ix). Untuk $s = x, t = x, u = z$, dengan $x, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$x \oplus_1 (x \oplus_1 z) \quad = \cup\, x \oplus_1 x, z$

$= x \oplus_1 x \cup x \oplus_1 z$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(x \oplus_1 x) \oplus_1 z \quad = x \oplus_1 z$

$= \{x, z\}$

(x). Untuk $s = x, t = y, z = y$, dengan $x, y \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$x \oplus_1 (y \oplus_1 y) \quad = \cup\, x \oplus_1 x, z$

$= x \oplus_1 x \cup x \oplus_1 z$

$= \{x\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(x \oplus_1 y) \oplus_1 y \quad = \cup\, x, z \oplus_1 y$

$= x \oplus_1 y \cup z \oplus_1 y$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(xi). Untuk $s = z, t = y, u = y$, dengan $y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$z \oplus_1 (y \oplus_1 y) \quad = \cup\, z \oplus_1 x, z$

$= z \oplus_1 x \cup z \oplus_1 z$

$= \{x, z\} \cup \{z\}$

$= \{x, z\}$

$(z \oplus_1 y) \oplus_1 y \quad = \cup\, x, z \oplus_1 y$

$= x \oplus_1 y \cup z \oplus_1 y$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(xii). Untuk $s = y, t = x, u = y$, dengan $x, y \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$y \oplus_1 (x \oplus_1 y) \quad = \cup\, y \oplus_1 x, z$

$= y \oplus_1 x \cup y \oplus_1 z$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(y \oplus_1 x) \oplus_1 y \quad = \cup\, x, z \oplus_1 y$

$= x \oplus_1 y \cup z \oplus_1 y$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(xiii). Untuk $s = y, t = z, u = y$, dengan $y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$y \oplus_1 (z \oplus_1 y) \quad = \cup\, y \oplus_1 x, z$

$= y \oplus_1 x \cup y \oplus_1 z$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

$(y \oplus_1 z) \oplus_1 y \quad = \cup\, x, z \oplus_1 y$

$= x \oplus_1 y \cup z \oplus_1 y$

$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$

$= \{x, z\}$

(xiv). Untuk $s = y, t = y, u = x$, dengan $x, y \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
y \oplus_1 (y \oplus_1 x) &= \cup\, y \oplus_1 x, z \\
&= y \oplus_1 x \cup y \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\} \\
(y \oplus_1 y) \oplus_1 x &= \cup\, x, z \oplus_1 x \\
&= x \oplus_1 x \cup z \oplus_1 x \\
&= \{x\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

(xv). Untuk $s = y, t = y, u = z$, dengan $y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
y \oplus_1 (y \oplus_1 z) &= \cup\, y \oplus_1 x, z \\
&= y \oplus_1 x \cup y \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\} \\
(y \oplus_1 y) \oplus_1 z &= x, z \oplus_1 z \\
&= x \oplus_1 z \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

(xvi). Untuk $s = x, t = z, u = z$, dengan $x, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
x \oplus_1 (z \oplus_1 z) &= x \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \\
(x \oplus_1 z) \oplus_1 z &= \cup\, x, z \oplus_1 z \\
&= x \oplus_1 z \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

(xvii). Untuk $s = y, t = z, u = z$, dengan $y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
y \oplus_1 (z \oplus_1 z) &= y \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \\
(y \oplus_1 z) \oplus_1 z &= \cup\, x, z \oplus_1 z \\
&= x \oplus_1 z \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

(xviii). Untuk $s = z, t = x, u = z$, dengan $x, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$\begin{aligned}
z \oplus_1 (x \oplus_1 z) &= \cup\, z \oplus_1 x, z \\
&= z \oplus_1 x \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\} \\
(z \oplus_1 x) \oplus_1 z &= \cup\, x, z \oplus_1 z \\
&= x \oplus_1 z \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}$$

(xix). Untuk $s = z, t = y, u = z$, dengan $y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$\begin{aligned}
z \oplus_1 (y \oplus_1 z) &= \cup\, z \oplus_1 x, z \\
&= z \oplus_1 x \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\} \\
(z \oplus_1 y) \oplus_1 z &= \cup\, x, z \oplus_1 z \\
&= x \oplus_1 z \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}$$

(xx). Untuk $s = z, t = z, u = x$, dengan $x, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$\begin{aligned}
z \oplus_1 (z \oplus_1 x) &= \cup\, z \oplus_1 x, z \\
&= z \oplus_1 x \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\} \\
(z \oplus_1 z) \oplus_1 x &= z \oplus_1 x \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}$$

(xxi). Untuk $s = z, t = z, u = y$, dengan $y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$\begin{aligned}
z \oplus_1 (z \oplus_1 y) &= \cup\, z \oplus_1 x, z \\
&= z \oplus_1 x \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\} \\
(z \oplus_1 z) \oplus_1 y &= z \oplus_1 y \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}$$

(xxii). Untuk $s = x, t = y, u = z$, dengan $x, y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
x \oplus_1 (y \oplus_1 z) &= \bigcup x \oplus_1 x, z \\
&= x \oplus_1 x \cup x \oplus_1 z \\
&= \{x\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\} \\
(x \oplus_1 y) \oplus_1 z &= \bigcup x, z \oplus_1 z \\
&= x \oplus_1 z \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

(xxiii). Untuk $s = x, t = z, u = y$, dengan $x, y, x \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
x \oplus_1 (z \oplus_1 y) &= \bigcup x \oplus_1 x, z \\
&= x \oplus_1 x \cup x \oplus_1 z \\
&= \{x\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\} \\
(x \oplus_1 z) \oplus_1 y &= \bigcup x, z \oplus_1 y \\
&= x \oplus_1 y \cup z \oplus_1 y \\
&= \{x, z\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

(xxiv).Untuk $s = y, t = x, u = z$, dengan $x, y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
y \oplus_1 (x \oplus_1 z) &= \bigcup y \oplus_1 x, z \\
&= y \oplus_1 x \cup y \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\} \\
(y \oplus_1 x) \oplus_1 z &= \bigcup x, z \oplus_1 z \\
&= x \oplus_1 z \cup z \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

(xxv). Untuk $s = y, t = z, u = x$, dengan $x, y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$$
\begin{aligned}
y \oplus_1 (z \oplus_1 x) &= \bigcup y \oplus_1 x, z \\
&= y \oplus_1 x \cup y \oplus_1 z \\
&= \{x, z\} \cup \{x, z\} \\
&= \{x, z\}
\end{aligned}
$$

$$(y \oplus_1 z) \oplus_1 x$$

$= \bigcup x, z \oplus_1 x$
$= x \oplus_1 x \cup z \oplus_1 x$
$= \{x\} \cup \{x, z\}$
$= \{x, z\}$

(xxvi).Untuk $s = z, t = x, u = y$, dengan $x, y, z \in U$, akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$z \oplus_1 (x \oplus_1 y) = \bigcup z \oplus_1 x, z$
$= z \oplus_1 x \cup z \oplus_1 z$
$= \{x, z\} \cup \{z\}$
$= \{x, z\}$

$(z \oplus_1 x) \oplus_1 y = \bigcup x, z \oplus_1 y$
$= x \oplus_1 y \cup z \oplus_1 y$
$= \{x, z\} \cup \{x, z\}$
$= \{x, z\}$

(xxvii). Untuk $s = z, t = y, u = x$, dengan $x, y, z \in U$ akan ditunjukan $s \oplus_1 (t \oplus_1 u) = (s \oplus_1 t) \oplus_1 u$, yakni

$z \oplus_1 (y \oplus_1 x) = \bigcup z \oplus_1 x, z$
$= z \oplus_1 x \cup z \oplus_1 z$
$= \{x, z\} \cup \{z\}$
$= \{x, z\}$

$(z \oplus_1 y) \oplus_1 x = \bigcup x, z \oplus_1 x$
$= x \oplus_1 x \cup z \oplus_1 x$
$= \{x\} \cup \{x, z\}$
$= \{x, z\}$

Berdasarkan (i) – (xxvii), terbukti $(U, \oplus_1)$ merupakan semihipergrup.

3.4 Reaksi Redoks Unsur Berkelium (Bk) Sebagai Penerapan Konsep Hiperstruktur Aljabar

Berkelium (Bk) adalah unsur kimia dalam tabel periodik dengan nomor atom 97, dan termasuk dalam golongan aktinida. Berikut ini adalah diagram Latimer unsur berkelium.

$+4 \quad Bk^{4+} \longrightarrow_{1.67} +3 \quad Bk^{3+} \longrightarrow_{-2.8} +2 \quad Bk^{2+} \longrightarrow_{-1.6} \; 0\ Bk$

Nilai E_1, E_2, dan E_3 yaitu sebagai berikut:

(i). $Bk^{4+} \longrightarrow Bk^{2+}$ $\quad E_1 = \frac{1.67(1)+(-2.8)(1)}{1+1} = \frac{1.67+(-2.8)}{2} = \frac{-1.13}{2} = -0.565$

(ii). $Bk^{4+} \longrightarrow Bk$ $E_2 = \frac{1.67(1)+(-2.8)(1)+(-1.6)(2)}{1+1+2} = \frac{1.67+(-2.8)+(-3.2)}{4} = \frac{-4.33}{4}$
$= -1.08$

(iii). $Bk^{3+} \longrightarrow Bk$ $E_3 = \frac{(-2.8)(1)+(-1.6)(2)}{1+2} = \frac{(-2.8)+(-3.2)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

Misalkan $G = \{Bk^{4+}, Bk^{3+}, Bk^{2+}, Bk\}$, maka kombinasi reaksi redoks spontan dari G yaitu sebagai berikut:

$Bk + Bk \longrightarrow Bk + Bk$ [0]
$Bk + Bk^{2+} \longrightarrow \{Bk^{3+} + Bk$ [0.4] $Bk^{2+} + Bk$ [0]
$Bk + Bk^{3+} \longrightarrow Bk^{3+} + Bk$ [0]
$Bk + Bk^{4+} \longrightarrow \{Bk^{2+} + Bk^{3+}$ [3.27] $Bk^{2+} + Bk^{2+}$ [1.035] $Bk^{2+} + Bk$ [0.52] $Bk^{3+} + Bk^{3+}$ [3.67] $Bk^{4+} + Bk^{3+}$ [2.75] $Bk^{4+} + Bk$ [0]

$Bk^{2+} + Bk^{2+} \longrightarrow \{Bk^{2+} + Bk^{2+}$ [0] $Bk + Bk^{3+}$ [1.2]
$Bk^{2+} + Bk^{3+} \longrightarrow \{Bk^{3+} + Bk^{2+}$ [0] $Bk^{3+} + Bk$ [0.8]
$Bk^{2+} + Bk^{4+} \longrightarrow \{Bk^{3+} + Bk^{3+}$ [4.47] $Bk^{3+} + Bk^{2+}$ [2.235] $Bk^{3+} + Bk$ [1.72] $Bk^{4+} + Bk^{3+}$ [2.235] $Bk^{4+} + Bk^{2+}$ [0]
$Bk^{3+} + Bk^{3+} \longrightarrow Bk^{3+} + Bk^{3+}$ [0]
$Bk^{3+} + Bk^{4+} \longrightarrow Bk^{4+} + Bk^{3+}$ [0]
$Bk^{4+} + Bk^{4+} \longrightarrow Bk^{4+} + Bk^{4+}$ [0].

Selanjutnya, didefinisikan G sebagai berikut: diketahui $a, b \in G$ dengan hiperoperasi $\oplus_2$ pada G sehingga berlaku $a \oplus_2 b = c$ dengan c adalah produk-produk reaksi redoks spontan dengan potensial sel terbesar yang terjadi antara a dan b. Sehingga reaksi redoks G disajikan pada tabel berikut:

Tabel 4. Reaksi Redoks $(G, \oplus_2)$

$\oplus_2$	Bk	Bk^{2+}	Bk^{3+}	Bk^{4+}
Bk	Bk	Bk, Bk^{3+}	Bk, Bk^{3+}	Bk^{3+}
Bk^{2+}	Bk, Bk^{3+}	Bk, Bk^{3+}	Bk, Bk^{3+}	Bk^{3+}
Bk^{3+}	Bk, Bk^{3+}	Bk, Bk^{3+}	Bk^{3+}	Bk^{3+}, Bk^{4+}
Bk^{4+}	Bk^{3+}	Bk^{3+}	Bk^{3+}, Bk^{4+}	Bk^{4+}

Misalkan $G = \{a, b, c, d\}$ dengan $a = Bk, b = Bk^{2+}, c = Bk^{3+}$, dan $d = Bk^{4+}$, maka tabel 4 dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih umum sebagai berikut:

Tabel 5. Tabel Operasi $(G, \oplus_2)$

$\oplus_2$	a	b	c	d
a	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{c\}$
b	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{c\}$

c	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{c,d\}$
d	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c,d\}$	$\{d\}$

Teorema 2. Misalkan $G = \{a, b, c, d\}$ dengan $a = Bk, b = Bk^{2+}, c = Bk^{3+}$, dan $d = Bk^{4+}$, dengan hiperoperasi $\oplus_2$ yang didefinisikan pada G, maka $(G,\oplus_2)$ merupakan semigrup-H_v komutatif.

Bukti.

(i). Berdasarkan tabel 4 dan 5, jelas bahwa $(G,\oplus_2)$ komutatif.

(ii). Selanjutnya. akan ditunjukan bahwa $(G,\oplus_2)$ bersifat asosiatif lemah yang dibagi menjadi beberapa kasus berikut yang disajikan pada tabel berikut

$a \oplus_2 (a \oplus_2 a) = a \oplus_2 a = \{a\}$	$(a \oplus_2 a) \oplus_2 a = a \oplus_2 a = \{a\}$
$b \oplus_2 (a \oplus_2 a) = b \oplus_2 a = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 a) \oplus_2 a = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (a \oplus_2 a) = c \oplus_2 a = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 a) \oplus_2 a = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$d \oplus_2 (a \oplus_2 a) = d \oplus_2 a = \{c\}$	$(d \oplus_2 a) \oplus_2 a = c \oplus_2 a = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (b \oplus_2 a) = a \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 b) \oplus_2 a = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (c \oplus_2 a) = a \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 c) \oplus_2 a = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (a \oplus_2 d) = a \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 d) \oplus_2 a = c \oplus_2 a = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (a \oplus_2 b) = a \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 a) \oplus_2 b = a \oplus_2 b = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (a \oplus_2 c) = a \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 a) \oplus_2 c = a \oplus_2 c = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (a \oplus_2 d) = a \oplus_2 d = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 a) \oplus_2 d = a \oplus_2 d = \{c\}$
$b \oplus_2 (b \oplus_2 b) = b \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 b) \oplus_2 b = \{a, c\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (b \oplus_2 b) = a \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 b) \oplus_2 b = \{a, c\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (b \oplus_2 b) = c \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 b) \oplus_2 b = \{a, c\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$d \oplus_2 (b \oplus_2 b) = d \oplus_2 \{a, c\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 b) \oplus_2 b = c \oplus_2 b = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (a \oplus_2 b) = b \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 a) \oplus_2 b = \{a, c\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (c \oplus_2 b) = b \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 c) \oplus_2 b = \{a, c\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (d \oplus_2 b) = b \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 d) \oplus_2 b = c \oplus_2 b = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (b \oplus_2 a) = b \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 b) \oplus_2 a = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (b \oplus_2 c) = b \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 b) \oplus_2 c = \{a, c\} \oplus_2 c = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (b \oplus_2 d) = b \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 b) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$c \oplus_2 (c \oplus_2 c) = c \oplus_2 c = \{c\}$	$(c \oplus_2 c) \oplus_2 c = c \oplus_2 c = \{c\}$
$a \oplus_2 (c \oplus_2 c) = a \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 c) \oplus_2 c = \{a, c\} \oplus_2 c = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (c \oplus_2 c) = b \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 c) \oplus_2 c = \{a, c\} \oplus_2 c = \{a, c\}$

$d \oplus_2 (c \oplus_2 c) = d \oplus_2 c = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 c) \oplus_2 c = \{c, d\} \oplus_2 c = \{c, d\}$
$c \oplus_2 (a \oplus_2 c) = c \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 a) \oplus_2 c = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (b \oplus_2 c) = c \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 b) \oplus_2 c = \{a, c\} \oplus_2 c = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (d \oplus_2 c) = c \oplus_2 \{c, d\} = \{c, d\}$	$(c \oplus_2 d) \oplus_2 c = \{c, d\} \oplus_2 c = \{c, d\}$
$c \oplus_2 (c \oplus_2 a) = c \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 c) \oplus_2 a = c \oplus_2 a = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (c \oplus_2 b) = c \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 c) \oplus_2 b = c \oplus_2 b = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (c \oplus_2 d) = c \oplus_2 \{c, d\} = \{c, d\}$	$(c \oplus_2 c) \oplus_2 d = c \oplus_2 d = \{c, d\}$
$d \oplus_2 (d \oplus_2 d) = d \oplus_2 d = \{d\}$	$(d \oplus_2 d) \oplus_2 d = d \oplus_2 d = \{d\}$
$a \oplus_2 (d \oplus_2 d) = a \oplus_2 d = \{c\}$	$(a \oplus_2 d) \oplus_2 d = c \oplus_2 d = \{c, d\}$
$b \oplus_2 (d \oplus_2 d) = b \oplus_2 d = \{c\}$	$(b \oplus_2 d) \oplus_2 d = c \oplus_2 d = \{c, d\}$
$c \oplus_2 (d \oplus_2 d) = c \oplus_2 d = \{c, d\}$	$(c \oplus_2 d) \oplus_2 d = \{c, d\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$d \oplus_2 (a \oplus_2 d) = d \oplus_2 c = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 a) \oplus_2 d = c \oplus_2 d = \{c, d\}$
$d \oplus_2 (b \oplus_2 d) = d \oplus_2 c = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 b) \oplus_2 d = c \oplus_2 d = \{c, d\}$
$d \oplus_2 (c \oplus_2 d) = d \oplus_2 \{c, d\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 c) \oplus_2 d = \{c, d\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$d \oplus_2 (d \oplus_2 a) = d \oplus_2 c = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 d) \oplus_2 a = d \oplus_2 a = \{c\}$
$d \oplus_2 (d \oplus_2 b) = d \oplus_2 c = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 d) \oplus_2 b = d \oplus_2 b = \{c\}$
$d \oplus_2 (d \oplus_2 c) = d \oplus_2 \{c, d\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 d) \oplus_2 c = d \oplus_2 c = \{c, d\}$
$a \oplus_2 (b \oplus_2 c) = a \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 b) \oplus_2 c = \{a, c\} \oplus_2 c = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (c \oplus_2 b) = a \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 c) \oplus_2 b = \{a, c\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (a \oplus_2 c) = b \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 a) \oplus_2 c = \{a, c\} \oplus_2 c = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (c \oplus_2 a) = b \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 c) \oplus_2 a = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (a \oplus_2 b) = c \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 a) \oplus_2 b = \{a, c\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$c \oplus_2 (b \oplus_2 a) = c \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(c \oplus_2 b) \oplus_2 a = \{a, c\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (b \oplus_2 d) = a \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 b) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$a \oplus_2 (d \oplus_2 b) = a \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 d) \oplus_2 b = c \oplus_2 b = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (a \oplus_2 d) = b \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 a) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$b \oplus_2 (d \oplus_2 a) = b \oplus_2 c = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 d) \oplus_2 a = c \oplus_2 a = \{a, c\}$
$d \oplus_2 (a \oplus_2 b) = d \oplus_2 \{a, c\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 a) \oplus_2 b = c \oplus_2 b = \{a, c\}$
$d \oplus_2 (b \oplus_2 a) = d \oplus_2 \{a, c\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 b) \oplus_2 a = c \oplus_2 a = \{a, c\}$
$a \oplus_2 (c \oplus_2 d) = a \oplus_2 \{c, d\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 c) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$

$a \oplus_2 (d \oplus_2 c) = a \oplus_2 \{c, d\} = \{a, c\}$	$(a \oplus_2 d) \oplus_2 c = c \oplus_2 c = \{c\}$
$c \oplus_2 (a \oplus_2 d) = c \oplus_2 c = \{c\}$	$(c \oplus_2 a) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$c \oplus_2 (d \oplus_2 a) = c \oplus_2 c = \{c\}$	$(c \oplus_2 d) \oplus_2 a = \{c, d\} \oplus_2 a = \{a, c\}$
$d \oplus_2 (a \oplus_2 c) = d \oplus_2 \{a, c\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 a) \oplus_2 c = c \oplus_2 c = \{c\}$
$d \oplus_2 (c \oplus_2 a) = d \oplus_2 \{a, c\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 c) \oplus_2 c = \{c, d\} \oplus_2 c = \{a, c\}$
$b \oplus_2 (c \oplus_2 d) = b \oplus_2 \{c, d\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 c) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$b \oplus_2 (d \oplus_2 c) = b \oplus_2 \{c, d\} = \{a, c\}$	$(b \oplus_2 d) \oplus_2 c = c \oplus_2 c = \{c\}$
$c \oplus_2 (b \oplus_2 d) = c \oplus_2 c = \{c\}$	$(c \oplus_2 b) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$
$c \oplus_2 (d \oplus_2 b) = c \oplus_2 c = \{c\}$	$(c \oplus_2 d) \oplus_2 b = \{c, d\} \oplus_2 b = \{a, c\}$
$d \oplus_2 (b \oplus_2 c) = d \oplus_2 \{a, c\} = \{a, c\}$	$(d \oplus_2 b) \oplus_2 c = c \oplus_2 c = \{c\}$
$d \oplus_2 (c \oplus_2 b) = d \oplus_2 \{a, c\} = \{c, d\}$	$(d \oplus_2 c) \oplus_2 b = \{c, d\} \oplus_2 b = \{a, c\}$

Berdasarkan tabel diatas, salah satu contoh kasus asosiatif lemah yaitu:

(1) $b \oplus_2 (c \oplus_2 d) = b \oplus_2 \{c, d\} = \{a, c\}$

(2) $(b \oplus_2 c) \oplus_2 d = \{a, c\} \oplus_2 d = \{c, d\}$

maka $b \oplus_2 (c \oplus_2 d) \cap (b \oplus_2 c) \oplus_2 d = \{c\} \neq \emptyset$. Berdasarkan (1) dan (2) terbukti $(G, \oplus_2)$ bersifat asosiatif lemah.

Selanjutnya, berdasarkan (i) dan (ii), terbukti $(G, \oplus_2)$ adalah semigrup-H_v komutatif.

4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari hasil penelitian ini yaitu produk-produk hasil reaksi redoks unsur aktinium (Ac) dan berkelium (Bk) yang dituliskan dalam suatu tabel operasi dan setelah dianalisis membentuk struktur semihipergrup $((\forall x, y, z \in H) x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$ dan semigrup-H_v komutatif $((\forall\, x, y, z \in H)\, x \circ (y \circ z) \cap (x \circ y) \circ z \neq \emptyset$, dan $(\forall\, x, y \in H)\, x \circ y = y \circ x)$.

References

[1] Al-Tahan, M., & Davvaz, B. (2022). Chemical Hyperstructures for Elements with Four Oxidation States. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*. 13(2), 85-97.

[2] Davvas, B. (2013). *Polygroup and Related System*. New Jersey: World Scientific.

[3] Davvas, B., & Vougiouklis, T. (2019). *A Walk Through Weak Hyperstructures H_V-Structures*. New Jersey: World Scientific.

[4] S. -C. Chung., K. M. Chun., N. J. Kim., S.Y. Jeong., H. Sim., J. Lee and H. Maeng. (2014). Chemical Hyperalgebras for Three Oxidations States of Elements. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem,* 72(2), 389-402.

[5] Saito, Taro. (1996). Kimia Anorganik (Ismunandar, Penerjemah.). Tokyo: Iwanami Shoten, Pulishers.