April 2024
Volume 5 Nomor 1

p-ISSN 2723-0325 e-ISSN 2723-0333

TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA

TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

is an international academic open-access journal that gains a foothold in mathematics and its applications issued twice a year. The focus is to publish original research and review articles on all aspects of pure and applied Mathematics. Editorial board members of the Journal and reviewers will review submitted papers. All submitted articles should report original, previously unpublished research results, experimental or theoretical, and will be peer-reviewed. Articles submitted to the journal should meet these criteria and must not be under consideration for publication elsewhere. Manuscripts should follow the Template of the journal and are subject to both review and editing.

Published by:

Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University.
Ambon
2024

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal
Volume 5 Number 1 | April 2024

Publisher
Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University, Ambon, Indonesia

Editorial Address
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Unversitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon 97233, Provinsi Maluku, Indonesia
Contact : +62 82397854220
Email : tensormathematics@gmail.com

Volume 5 Number 1 | April 2024

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal

April 2024 | Vol. 5 | No. 1 Halaman 1–8
p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

Topology Properties of p-Adic Metric Space

Novita Dahoklory[1*], Henry W. M. Patty[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Universitas Pattimura
*Email: novitadahoklory93@gmail.com

Manuscript submitted : March 2024
Accepted for publication : April 2024
doi: https://doi.org/10.30598/tensorvol5iss1pp1-8

Abstract. Given a p-adic metric space $(\mathbb{Q}, d_p)$ with a p-adic metric, a metric that induced by using an absolute value of p-adic on the set $\mathbb{Q}$. In this paper, we will show that $(\mathbb{Q}, d_p)$ is a non-Archimedean metric space. Moreover, we will investigate some topology properties namely, properties of open and close ball which apply on p-adic metric space $(\mathbb{Q}, d_p)$.

2010 Mathematical Subject Classification : 26E30, 30L99.
Keywords: close ball, open ball, p-adic metric space, non-Archimedean metric space

1. Pendahuluan

Ruang metrik merupakan salah satu kajian dalam bidang analisis yang terus dikembangkan. Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi suatu metrik $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi beberapa aksioma tertentu [1]. Salah satu ruang metrik adalah $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Diketahui bahwa metrik d merupakan metrik yang diinduksi dengan menggunakan fungsi norm yaitu nilai mutlak pada $\mathbb{R}$ [2] . Fenomena ini kemudian memotivasi pendefinisian metrik dengan suatu fungsi norm. Salah satunya adalah metrik p —adic yang didefinisikan melalui nilai mutlak p —adic [3].

Nilai mutak p —adic merupakan suatu fungsi yang didefinisikan dengan konsep order suatu $a \in \mathbb{Z}$ pada suatu bilangan prima p dinotasikan $ord_p a$. Diketahui bahwa dengan $ord_p a = m$ dimana m merupakan suatu bilangan bulat terbesar sedemikian sehingga p^m habis membagi a [4]. Salah satu sifat yang berlaku dari order adalah $ord_p ab = ord_p a + ord_p b$. Hal ini kemudian memotivasi munculnya pendefinisian order suatu bilangan rasional $x = \frac{a}{b}$ dengan $ord_p x = ord_p a - ord_p b$. Dengan memanfaatkan konsep order, didefinisikan suatu fungsi yaitu

$$|\cdot|_p: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

dengan $|x|_p = p^{-ord_p x}$ yang kemudian disebut dengan nilai mutlak p —adic [4].

Sama halnya dengan pendefinisian metrik d dengan memanfaatkan fungsi nilai mutlak, dapat dibentuk metrik pada $\mathbb{Q}$ yang dibentuk berdasarkan dengan nilai mutlak p —adic yaitu

$$d_p: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

dengan $d_p(x.y) = |x - y|_p$. Metrik d_p disebut sebagai metrik p −adic sedangkan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ disebut sebagai ruang metrik p −adic [3]. Secara khusus, ruang adalah ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik non-Archimedean yakni ruang metrik yang memenuhi sifat ketaksamaan segitiga kuat yaitu $d(x,z) \leq \text{maks}\{d(x,y), d(y,z)\}$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Q}$ [5].

Dalam penelitian ini, akan dijelaskan ruang metrik p −adic secara khusus pada himpunan $\mathbb{Q}$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan sifat ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ sebagai ruang metrik non-Archimedean, akan diselidiki sifat-sifat topologi ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$.

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$ serta akan diberikan sifat-sifat topologi yang berlaku di dalam ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$.

2.1. Ruang Metrik p −Adic

Pada bagian ini akan dijelaskan ruang metrik p −adic. Namun sebelumnya dijelaskan terlebih dahulu konsep order suatu bilangan bulat pada p dengan p suatu bilangan prima.

Definisi 1. [3] Misalkan p suatu bilangan prima dan $a \in \mathbb{Z}$. Order dari a pada p merupakan fungsi yang didefinisikan sebagai

$$ord_p a = \begin{cases} \text{maks}\{m| \quad p^m|a, & x \neq 0 \\ \qquad\qquad\quad \infty, & x = 0. \end{cases}$$

Dengan kata lain, $ord_p a$ merupakan bilangan bulat terbesar m sedemikian sehingga p^m habis membagi a. Untuk memperjelas definisi di atas, diberikan contoh order suatu bilangan bulat sebagai berikut.

Contoh 2

Diberikan bilangan prima $p = 5$. Diperoleh

1. $ord_5 45 = 1$ karena $45 = 3^2 \cdot 5$ sehingga 1 merupakan bilangan bulat terbesar sedemikian sehingga 5^1 habis membagi 35.
2. $ord_5 3 = 0$ karena 0 merupakan bilangan terbesar dengan 5^0 habis membagi 3.

Selanjutnya, akan diberikan sifat-sifat yang berhubungan dengan order suatu bilangan yang disajikan dalam Lema berikut ini.

Lema 3. [6] Diberikan p suatu bilangan prima dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Belaku

i. $ord_p ab = ord_p a + ord_p b$;
ii. $ord_p(ad + bc) \geq min\,\{ord_p ad, ord_p bc\}$

Bukti.

Diketahui p prima dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Misalkan $ord_p a = m$, $ord_p b = n$ dan $ord_p ab = q$.

i. Pertama-tama, akan ditunjukkan terlebih dahulu $ord_p a$+$ord_p b \leq ord_p ab$ yaitu $m + n \leq q$. Karena $ord_p a = m$, $ord_p b = n$ dan $ord_p ab = q$, yang berarti

$$p^m p^n | ab$$
$$p^{m+n} | ab.$$

Karena $ord_p ab = q$, diperoleh $m + n \leq q$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $ord_p ab \leq ord_p a$+$ord_p b$ yaitu $q \leq m + n$. Diandaikan $q > m + n$. Dengan kata lain $q = m + n + r$ untuk suatu $r > 0$. Artinya,

$$p^{m+n+r} | ab.$$

Karena, $ord_p a = m$, diperoleh $p^{n+r} | b$. Hal ini menimbulkan kontradiksi, karena $ord_p b = n$. Oleh karena itu, diperoleh $q \leq m + n$.

Tebukti, $q = m + n$ yaitu $ord_p ab = ord_p a + ord_p b$.

ii. Misalkan $min\,\{ord_p ad, ord_p bc\} = x$ yaitu $x \leq ord_p ad$ dan $x \leq ord_p bc$. Jadi, $p^x|ad$ dan $p^x|bc$ sehingga$p^x|ad + bc$. Dengan demikian, diperoleh $ord_p(ad + bc) \geq x$ yang berarti $ord_p(ad + bc) \geq min\,\{ord_p ad, ord_p bc\}$. ■

Berdasarkan sifat di atas, diperoleh $ord_p ab = ord_p a + ord_p b$. Sifat kemudian memotivasi pendefinisian order dari suatu bilangan rasional $x = \frac{a}{b}$ yang disajikan dalam definisi berikut

Definisi 4. [4] Diberikan himpunan $\mathbb{Q}$ dengan suatu bilangan prima p. Order dari suatu $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ pada p didefinisikan sebagai

$$ord_p x = ord_p a - ord_p b$$

untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $b \neq 0$.

Berikut contoh order dari suatu bilangan rasional.

Contoh 5

Diberikan $p = 5$ dengan $x = \frac{7}{45}$ dan $y = \frac{50}{8}$. Diperoleh

$$ord_5 \frac{7}{45} = ord_5 7 - ord_5 45 = 0 - 1 = -1$$

dan

$$ord_p \frac{50}{8} = ord_5 50 - ord_5 8 = 2 - 0 = 2.$$

Selanjutnya akan diberikan sifat order pada himpunan $\mathbb{Q}$ yang disajikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 6. [3] Diberikan suatu bilangan prima p dengan $x, y \in \mathbb{Q}$. Berlaku

(1) $ord_p xy = ord_p x + ord_p y$;

(2) $ord_p(x + y) \geq min\,\{ord_p x, ord_p y\}$

Bukti

Diberikan $x, y \in \mathbb{Q}$ yaitu $x = \frac{a}{b}$ dan $y = \frac{c}{d}$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dengan $b, d \neq 0$. Berdasarkan **Definisi 4** dan **Lema 3**, didapatkan

(1) $$\begin{aligned} ord_p xy &= ord_p(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{c}{d}) \\ &= ord_p(\tfrac{ac}{bd}) \\ &= ord_p(ac) - ord_p(bd) \\ &= ord_p a + ord_p c - ord_p b - ord_p d \\ &= ord_p a - ord_p b + ord_p c - ord_p d \\ &= ord_p \frac{a}{b} + ord_p \frac{c}{d} \\ &= ord_p x + ord_p y. \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} ord_p(x + y) &= ord_p(\tfrac{a}{b} + \tfrac{c}{d}) \\ &= ord_p \frac{ad + bc}{bd} \\ &= ord_p(ad + bc) - ord_p bd \\ &\geq min\,\{ord_p ad, ord_p bc\} - ord_p bd \\ &= min\,\{ord_p ad - ord_p bd, ord_p bc - ord_p bd\} \\ &= \min\,\{ord_p \frac{ad}{bd}, ord_p \frac{bc}{bd}\} \\ &= \min\,\{ord_p \frac{a}{b}, ord_p \frac{c}{d}\} \\ &= min\,\{ord_p x, ord_p y\}. \end{aligned}$$

Terbukti, $ord_p xy = ord_p x + ord_p y$ dan $ord_p(x + y) \geq min\,\{ord_p x, ord_p y\}$. ■

Pendefinisian order suatu bilangan rasional pada p kemudian memotivasi fungsi nilai mutlak $p - adic$ $|\cdot|_p$ pada $\mathbb{Q}$ yang disajikan dalam definisi berikut.

Definisi 7. [4] Diberikan himpunan $\mathbb{Q}$ dengan bilangan prima p. Nilai mutlak $p - adic$ dari suatu $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ didefinisikan sebagai

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{ord_p x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Berikut akan diberikan contoh nilai mutlak $p - adic$ dari suatu bilangan di $\mathbb{Q}$.

Contoh 8

Diberikan $p = 5$ dengan $x = \frac{7}{45}$ dan $y = \frac{50}{8}$. Menurut **Contoh ,** didapatkan

$$\left|\frac{7}{45}\right|_5 = \frac{1}{5^{ord_5 \frac{7}{45}}} = \frac{1}{5^{-1}} = 5$$

dan

$$\left|\frac{50}{8}\right|_5 = \frac{1}{5^{ord_5 \frac{50}{8}}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

Dengan menggunakan norm $|\cdot|_p$, dikonstruksikan suatu metrik pada $\mathbb{Q}$ yang didefinisikan sebagai

$$d_p(x, y) = |x - y|_p$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik. Namun sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi ruang metrik non-Archimedean.

Definisi 9, [5] Suatu ruang metrik (X, d) disebut ruang metrik non-Archimedean jika memenuhi sifat segitiga kuat yaitu $d(x, z) \leq maks\{d(x, y), d(y, z)\}$ untuk setiap $x, y, z \in X$

Teorema 10. [7] Himpunan $(\mathbb{Q}, d_p)$merupakan ruang metrik non-Archimedean.

Bukti.

Diketahui himpunan $(\mathbb{Q}, d_p)$ dengan fungsi d_p. Akan dibuktikan $d_p: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ merupakan metrik yang memenuhi ketaksamaan segitiga kuat pada $\mathbb{Q}$.

Diambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Perlu ditunjukkan bahwa (i) $d_p(x, y) \geq 0$; (ii) $d_p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$; (iii) $d_p(x, y) = d_p(y - x)$; dan (iv) $d_p(x, y) \leq maks\{d_p(x, z), d_p(z, y)\}$.

i. Karena p bilangan positif, diperoleh $\frac{1}{p^{ord_p x-y}} \geq 0$. Jadi, $d_p(x, y) \geq 0$.

ii. $(\Rightarrow)$ Diketahui $d_p(x, y) = 0$, berarti

$$d_p(x, y) = 0$$
$$|x - y|_p = 0$$

Berdasarkan **Definisi 7**, didapatkan $x - y = 0$ yaitu $x = y$.

$(\Rightarrow)$ Diketahui $x = y$, diperoleh

$$d_p(x, y) = |x - y|_p = |0|_p = 0.$$

iii. Selanjutnya, akan dibuktikan $d_p(x, y) = d_p(y - x)$. Menurut **Proposisi 6,** diperoleh

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= |x - y|_p \\ &= |(-1)(y - x)|_p \\ &= |-1|_p |y - x|_p \\ &= |(y - x|_p \\ &= d_p(y, x). \end{aligned}$$

iv. Lebih lanjut, akan ditunjukkan $d_p(x,z) \leq maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$. Menurut **Proposisi 6**, didapatkan

$$\begin{aligned} d_p(x,z) &= \frac{1}{p^{ord_p x-z}} \\ &= \frac{1}{p^{ord_p(x-y)+(y-z)}} \\ &\leq \frac{1}{p^{\min\{ord_p x-y, ord_p x-z\}}} \\ &= maks\{\frac{1}{p^{ord_p x-y}}, \frac{1}{p^{ord_p y-z}}\} \\ &= maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}. \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik non-Archimedean. ■

Ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ kemudian disebut sebagai **ruang metrik p −adic** [1].

Lema 11. [8] Diberikan ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$. Jika $|x|_p \neq |y|_p$ maka $|x+y|_p = maks\{|x|_p, |y|_p\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.

Bukti

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $|x|_p > |y|_p$. Berdasarkan **Teorema 10**, didapatkan

$$|x+y|_p \leq maks\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Di lain pihak,

$$|x|_p = |x+y-y|_p \leq maks\{|x+y\,|_p, |y|_p\} = |x+y\,|_p.$$

Didapatkan, $|x+y\,|_p = |x\,|_p = maks\{|x|_p, |y|_p\}$. ■

2.2. Topologi Dalam Ruang Metrik p −Adic

Pada bagian ini akan diberikan sifat ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$ sebagai ruang metrik non-Archimedean. Namun sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi bola terbuka dan bola tertutup.

Definisi 12. [9] Diberikan ruang metrik (X, d) dengan $x \in X$.

(i) Himpunan $B(x,r) = \{y \in X | d(x,y) < r, r > 0\}$ disebut sebagai bola terbuka;

(ii) Himpunan $\bar{B}(x,r) = \{y \in X | d(x,y) \leq r, r \geq 0\}$ disebut sebagai bola terbuka.

Selanjutnya akan diberikan contoh dari suatu bola dalam ruang metrik p-adic $(\mathbb{Q}, d_p)$.

Contoh 13

Diberikan ruang metrik 2-adic $(\mathbb{Q}, d_2)$. Misalkan $x = 5$ dan $r = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} B(5,1) &= \{y \in \mathbb{Q} | d_2(5,y) < 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} \big| |5-y|_p < 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} \bigg| \frac{1}{2^{ord_p 5-y}} < 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} | 2^{-ord_p 5-y} < 2^0\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} | -ord_p 5 - y < 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} | ord_p 5 - y > 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} | p^m | 5-y, m > 1\} \\ &= \{\ldots -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7 \ldots\} \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan diberikan sifat bola terbuka $B(x, \varepsilon)$ dalam ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$ yang disajikan dalam Lema berikut.

Lema 14. [4] Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$.

(i) Bola terbuka $B(x,r)$ merupakan himpunan terbuka dan himpunan tertutup.

(ii) Bola tertutup $\bar{B}(x,r)$ dengan $r \neq 0$ merupakan himpunan terbuka dan himpunan tertutup.

Bukti.

Diketahui ruang metrik p-adic $(\mathbb{Q}, d_p)$.

(i) Pertama-tama, akan ditunjukkan bola terbuka $B(x,r)$ merupakan himpunan terbuka dan tertutup. Berdasarkan sifat ruang metrik, diketahui bola terbuka $B(x,r)$ merupakan himpunan terbuka. Oleh karena itu, hanya perlu ditunjukkan bahwa $B(x,\varepsilon)$ merupakan himpunan tertutup yaitu dengan menunjukkan setiap titik klosur $a \in \overline{B(x,r)}$ ada di dalam $B(x,r)$.

Diketahui bahwa $a \in \overline{B(x,\varepsilon)}$ yang berarti $B(x,r) \cap B(a,\varepsilon) \neq \emptyset$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.Misalkan $\varepsilon \leq r$. Karena $B(x,r) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ yaitu terdapat suatu $y \in B(x,r) \cap B(a,\varepsilon)$. Jadi, $d_p(x,y) < r$ dan $d_p(a,y) < \varepsilon$. Dengan menggunakan sifat non-Archimedean, didapatkan

$$d_p(x,a) \leq maks\{d_p(x,y), d_p(y,a)\} < maks\{r,\varepsilon\} = r.$$

Dengan kata lain, $a \in B(x,r)$. Dapat disimpulkan bahwa $B(x,\varepsilon)$.

(ii) Selanjutnya akan ditunjukkan bola terbuka $\bar{B}(x,r)$ dengan $r \neq 0$ yaitu $r > 0$ merupakan himpunan terbuka dan tertutup. Menurut sifat ruang metrik $\bar{B}(x,r)$ merupakan himpunan tertutup sehingga hanya perlu ditunjukkan merupakan himpunan terbuka.

Diambil sebarang $y \in \bar{B}(x,r)$ yang berarti $d(x,y) = s \leq r$. Misalkan $s = 0$, diperoleh $B(y,s) = \{x\} \subseteq \bar{B}(x,r)$. Untuk $s > 0$, dapat dibentuk bola terbuka $B(y,s)$. Diambil sebarang $z \in B(y,s)$ yaitu $d(y,z) < s$. Karena $(\mathbb{Q}, d_p)$ memenuhi sifat segitiga kuat, diperoleh

$$d(x,z) \leq maks\{d(x,y), d(y,z)\} = s \leq r.$$

Oleh karena itu, didapatkan $z \in \bar{B}(x,r)$. Dengan kata lain, $B(y,s) \subseteq \bar{B}(x,r)$. Terbukti, $\bar{B}(x,r)$ merupakan himpunan terbuka. ■

Untuk memperjelas lema di atas, akan diberikan sifat dimana suatu bola tertutup dalam ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan himpunan terbuka yaitu gabungan berhingga bola terbuka di $(\mathbb{Q}, d_p)$.

Teorema 15. [10] Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$. Berlaku $\bar{B}(0,1) = B(0,1) \cup B(1,1) \cup B(2,1) \cup \cdots \cup B(P-1,1)$.

Bukti.

Diketahui ruang metrik $p-\ adic$. Akan dibuktikan $\bar{B}(0,1) = B(0,1) \cup B(1,1) \cup B(2,1) \cup \cdots \cup B(P-1,1)$.

i. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $\bar{B}(0,1) \subseteq B(0,1) \cup B(1,1) \cup B(2,1) \cup \cdots \cup B(P-1,1)$. Diambil sebarang $x = \frac{a}{b} \in \bar{B}(0,1)$ yang berarti $d_p\left(\frac{a}{b}, 0\right) = \left|\frac{a}{b}\right|_p \leq 1$.

- Untuk $\left|\frac{a}{b}\right|_p < 1$, didapatkan $\frac{a}{b} \in B(0,1)$.
- Untuk $\left|\frac{a}{b}\right|_p = 1$ yaitu $p^{-ord_pa + ord_pb} = 1$ sehingga diperoleh $-ord_pa + ord_pa = 0$. Jadi, $ord_pa = ord_pb$, misalkan $ord_pa = ord_pb = m$. Diperoleh

$$\frac{a}{b} = \frac{p^m a'}{p^m b'}$$

dengan $p \nmid a'$ dan $p \nmid b'$. Karena $b' \neq 0$, terdapat $b'^{-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b'b'^{-1} \equiv 1 (mod\ p)$. Oleh karena itu, didapatkan $b'b'^{-1}a' \equiv a' (mod\ p)$. Karena $p \nmid a'$, didapatkan $b'^{-1}a' \equiv j (mod\ p)$ untuk suatu $1 \leq j \leq p-1$ sehingga $a' \equiv jb' (mod\ p)$. Jadi, $p | jb' - a'$ yang berarti

$$ord_p(jb' - a') \geq 1 \qquad (*)$$

Hal ini mengakibatkan,

$$\begin{aligned}\left|j-\frac{a}{b}\right|_p &= \left|j-\frac{a'}{b'}\right|_p \\ &= \left|\frac{jb'-a'}{b'}\right|_p \\ &= p^{-(ord_p(jb'-a)-ord_pb')} \\ &= \frac{1}{p^{-ord_p(jb'-a)+ord_pb'}}.\end{aligned}$$

Berdasarkan $(*)$, diperoleh

$$\left|j-\frac{a}{b}\right|_p = \frac{1}{p^{-ord_p(jb'-a)+ord_pb'}} < 1.$$

Dengan kata lain, $\frac{a}{b} \in B(j,1)$ untuk suatu $1 \le j \le p-1$. Artinya, $x \in B(1,1) \cup B(2,1) \cup \cdots \cup B(P-1,1)$.

ii. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $B(0,1) \cup B(1,1) \cup B(2,1) \cup \cdots \cup B(P-1,1) \subseteq \bar{B}(0,1)$.

- Jelas bahwa $B(0,1) \subseteq \bar{B}(0,1)$.
- Diambil sebarang $x \in B(i,1)$ untuk suatu $1 \le i \le p-1$. Artinya $d_p(i,x) < 1$ yaitu $|i-x|_p < 1$. Jadi,

$$\left|i-\frac{a}{b}\right|_p = \left|\frac{ib-a}{b}\right|_p < 1.$$

Akibatnya,

$$p^{ord_pb+ord_p(ib-a)} < p^0$$

yang berarti $ord_p(ib-a) > ord_pb$. Misalkan $ord_pb = m$ sehingga $ord_p(ib-a) > m$. Jadi, $b = p^m.b'$ d dengan $p \nmid b'$ yang mengakibatkan

$$\frac{ib-a}{b} = \frac{ib'-a'}{b'} \cdot \frac{p^m}{p^m}$$

dengan $a = a'p^m$. Diperhatikan bahwa $ord_p(ib-a) > m$, didapatkan

$$p|ib'-a'. \qquad (*)$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $p \nmid a'$. Diandaikan $p|a'$, berdasarkan (*) didapatkan $p|ib'$. Hal ini mengakibatkan kontradiksi karena $p \nmid b$ dan $p \nmid i$. Dapat disimpulkan bahwa $p \nmid a$.

Didapatkan, $p \nmid a'$ dan $p \nmid b'$ yang berarti $ord_pa' = ord_pb' = 0$. Dengan demikian, diperoleh

$$d_p(x,0) = \left|\frac{a}{b}\right|_p = \left|\frac{a'p^m}{b'p^m}\right|_p = \left|\frac{a'}{b'}\right|_p = \frac{1}{p^{(ord_pa'-ord_pb')}} = \frac{1}{p^0} = 1.$$

Dapat disimpulkan bahwa $x \in \bar{B}(0,1)$. Terbukti, $(0,1) \cup B(1,1) \cup B(2,1) \cup \cdots \cup B(P-1,1) \subseteq \bar{B}(0,1)$. ■

Lema 16. [8] Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$. Jika $y \in B(x,r)$ maka $B(x,r) = B(y,r)$.

Bukti.

Diambil sebarang $y \in (x,r)$ yang berarti $d_p(x,y) < r$. Akan dibuktikan $B(y,r) \subseteq B(x,r)$.
Diambil sebarang $z \in B(y,r)$ yang artinya $d_p(y,z) < r$ sehingga diperoleh

$$d_p(x,z) \le maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)\} < r.$$

Akibatnya, $z \in B(x,r)$ yaitu $B(y,r) \subseteq B(x,r)$. ■

Dengan kata lain, setiap elemen di dalam bola $B(x,r)$ pada ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan pusat dari bola terbuka tersebut.

Lema 17. [8] Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$. Jika $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset$ maka $B(x,r) \subseteq B(y,s)$ atau $B(y,s) \subseteq B(x,r)$.

Bukti.
Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $r \leq s$. Diketahui bahwa $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset$ yang berarti terdapat $z \in B(x,r) \cap B(y,z)$. Berdasarkan **Lema 16,** berlaku $B(x,r) = B(z,r)$ dan $B(z,s) = B(y,s)$. Karena $r \leq s$, didapatkan $B(z,r) \subseteq B(z,s)$. Dengan demikian, diperoleh $B(x,r) \subseteq B(y,s)$. ■

3. Kesimpulan

1. Ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik non-Archimedean.
2. Diberikan ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$. Beberapa sifat topologi dalam $(\mathbb{Q}, d_p)$, diantaranya:
   (i) Setiap bola terbuka $B(x,r)$ merupakan himpunan terbuka dan tertutup;
   (ii) Setiap elemen dalam $B(x,r)$ merupakan pusat dari bola terbuka tersebut.
   (iii) Untuk setiap bola terbuka $B(x,r)$ dan $B(y,s)$ berlaku
      a) $B(x,r)$ dan $B(y,s)$ saling asing; atau
      b) $B(x,r) \subseteq B(y,s)$ atau $B(x,r) \subseteq B(y,s)$.
3. Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$. Berlaku $\bar{B}(0,1) = B(0,1) \cup B(1,1) \cup B(2,1) \cup \cdots \cup B(P-1,1)$.

Daftar Pustaka

[1] Kreyszig, E. (1989). Introductional Functional Analysis with Application. John Wiley and Sons, New York.
[2] Bartle, R. G., & Sherbert. D. R. (2011). Introduction to Real Analysis 4th Edition. John Wiley and Sons, New York.
[3] Baker, A.J. (2002). An Introduction to p-adic Number and p-adic Analysis. Glasgow, Scotland.
[4] Gouvea, F. Q. (2012). p-adic numbers: An introduction, Universitext. Springer, Berlin Heidelberg.
[5] Lemin, A. (2003). On ultrametrization of general metric spaces. *Proceedings of the American mathematical society*, *131*(3), 979-989.
[6] Koblitz, N. (2012). P-adic Numbers, P-adic Analysis, and Zeta-Functions. Amerika Serikat: Springer New York.
[7] Pomerantz, A. An introduction to the p-adic numbers. http://math.uchicago.edu/may/REU2020/REUPapers/Pomerantz.pdf
[8] Chernysh, E. (2017). A Brief Note on p-adic Analysis, p-Adic Topology and Ostrowski's Theorem.
[9] Schikhof, W. H. (1984). Ultrametric Calculus, 1st ed., D. J. H Garling and D Gorenstein, Eds. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
[10] Quick, L. (2018). p-adic Absolute Values. The University of Chicago Mathematics REU.