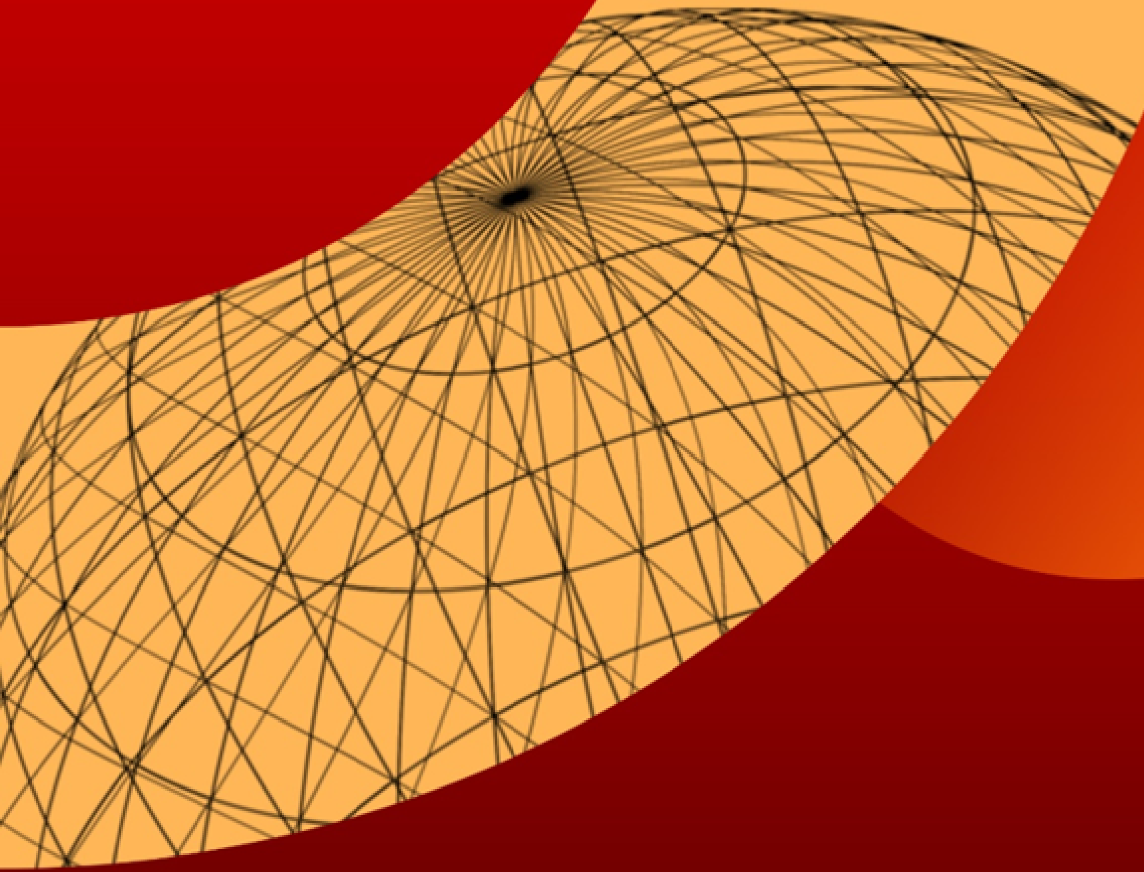
April 2024
Volume 5 Nomor 1

p-ISSN 2723-0325 e-ISSN 2723-0333



TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA

is an international academic open-access journal that gains a foothold in mathematics and its applications issued twice a year. The focus is to publish original research and review articles on all aspects of pure and applied Mathematics. Editorial board members of the Journal and reviewers will review submitted papers. All submitted articles should report original, previously unpublished research results, experimental or theoretical, and will be peer-reviewed. Articles submitted to the journal should meet these criteria and must not be under consideration for publication elsewhere. Manuscripts should follow the Template of the journal and are subject to both review and editing.

Published by:

Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University.
Ambon
2024

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal
Volume 5 Number 1 | April 2024

Publisher
Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University, Ambon, Indonesia

Editorial Address
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Unversitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon 97233, Provinsi Maluku, Indonesia
Contact : +62 82397854220
Email : tensormathematics@gmail.com

Volume 5 Number 1 | April 2024

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal

April 2024 | Vol. 5 | No. 1 Halaman 9–16
p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

Symmetric Functions with Respect to a Point (a,b) and Its Properties that Generalized from Properties of Odd Functions

Nehemia Trianto Natasian[1]*, Yopi Andry Lesnussa[1], Harmanus Batkunde[1]
[1]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Pattimura,Jalan Ir. M . Putuhena, Kampus Poka – Unpatti, Ambon,Indonesia.
*Email: nehemianatasian19@gmail.com

Manuscript submitted : March 2024;
Accepted for publication : April 2024.
doi: https://doi.org/10.30598/tensorvol1iss1pp9-16

Abstract: The function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is said to be an odd function if $f(-x) = -f(x)$ for every $x \in \mathbb{R}$. The graph of an odd function f is symmetry with respect to origin, or point (0,0). The propose of this study is to observe some properties of symmetrical functions which are generalize from some properties of odd functions. Some of the results obtained a linear combination of two symmetrical functions with respect to the point (a, b) is a symmetrical function with respect to the point $(a, 2b)$. An integral of a symmetrical function with respect to the point (a, b) on a closed interval $[a - c, a + c]$ is $2bc$ for any real number c. Moreover, product of scalars (α) with a symmetrical function with respect to the point (a, b) is a symmetrical function with respect to the point $(a, \alpha b)$ for every α real numbers. Furthermore, the addition n symmetrical functions with respect to the point (a, b) is a series of functions of symmetrical with respect to the point (a, nb).

Keywords: Odd function, Function symmetry with respect to point, Graph function symmetry.

1. Pendahuluan

Matematika secara umum didefinisikan sebagai bidang ilmu yang mempelajari pola dari struktur, perubahan dan ruang. Maka secara informal dapat juga disebut sebagai ilmu bilangan dan angka. Dalam pandangan formalis, matematika adalah penelaahan struktur abstrak yang didefinisikan secara aksioma dengan menggunakan logika simbolik dan notasi [1].

Fungsi dalam matematika adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) dengan suatu nilai tunggal *f(x)* dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari relasi tersebut daerah hasil (range). Pada fungsi dikenal konsep fungsi ganjil dan genap. Secara khusus untuk fungsi bernilai real topik fungsi ganjil dan genap merupakan konsep yang umum dibahas. Lebih lanjut fungsi ganjil adalah fungsi yang grafiknya simetri terhadap titik asal 0(0,0) [2]. F. Ubaidillah tahun 2020 telah membahas fungsi simetri terhadap garis x=a dan beberapa sifat yang diperluas [3].

Dari uraian diatas selanjutnya akan dibahas fungsi simetri terhadap titik (*a,b*). Kemiripan dengan fungsi ganjil atau fungsi yang simetri terhadap titik asal, menjadi patokan untuk melihat apakah sifat-sifat fungsi tersebut masih berlaku pada fungsi yang simetri terhadap titik (*a,b*).

Definisi 1.1. [2] Suatu fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan fungsi ganjil jika berlaku $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1. [4] Jika f fungsi ganjil, maka $f(0) = 0$.

Bukti:

Diketahui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi ganjil, maka $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukan $f(0) = 0$.

Berdasarkan definisi fungsi ganjil dapat ditulis

$$f(0) = f(-0) = -f(0)$$

atau

$$f(0) = -f(0).$$

Diperoleh,

$$f(0) + f(0) = 0$$
$$2f(0) = 0$$

maka

$$f(0) = 0.$$

Sehingga terbukti bahwa jika f fungsi ganjil maka $f(0) = 0$. ∎

Teorema 1.2. [5] Misal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jika $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefenisikan oleh $g(x) = f(x) - f(-x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka g merupakan fungsi ganjil.

Bukti:

Diketahui sebarang fungsi $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dan didefinisikan suatu fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oleh $g(x) = f(x) - f(-x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukan g merupakan fungsi ganjil.

Karena

$$g(x) = f(x) - f(-x).$$

Maka berdasarkan definisi fungsi ganjil maka dapat ditulis

$$g(-x) = f(-x) - f(x).$$

Atau

$$g(-x) = -f(x) + f(-x),$$

sehingga diperoleh

$$g(-x) = -[f(x) - f(-x)] = -g(x)$$

Dengan demikian terbukti bahwa g merupakan fungsi ganjil. ■

Teorema 1.3. [5] Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Jika $f_1, f_2, \ldots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi-fungsi ganjil maka,

$$p(x) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n(x)$$

merupakan fungsi ganjil.

Bukti:

Diketahui $f_1, f_2, \ldots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi-fungsi ganjil, misal $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

Akan ditunjukan p adalah fungsi ganjil.

Lebih lanjut

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n)(-x)$$
$$= -[\ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n)(-x)].$$

Perhatikan bahwa berdasarkan sifat fungsi ganjil,

$$p(-x) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n)(-x)$$
$$p(-x) = \alpha_1 f_1(-x) + \alpha_2 f_2(-x) + \ldots + \alpha_n f_n(-x).$$

Sehingga,

$$p(-x) = -[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)] = -\,p(x).$$

Dengan demikian diperoleh p merupakan fungsi ganjil. ■

Teorema 1.4. [6] Misal $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan $c \geq 0$. Jika f fungsi ganjil yang terintegral ada selang $[-c, c]$, maka

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$$

Bukti:

Misal $c \geq 0$ dan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi ganjil. Perhatikan bahwa karena f ganjil, maka sesuai teorema 2 diperoleh

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{c} f(-x)\,dx,$$

berdasarkan sifat-sifat integral tentu, diperoleh

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{c} -f(x)\,dx$$
$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \left(-\int_{-c}^{c} f(x)\,dx\right),$$

Jumlahkan kedua ruas dengan $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$.

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx + \int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{c} f(x)\,dx - \int_{-c}^{c} f(x)\,dx,$$

diperoleh

$$2\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0,$$

sehingga

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0.$$

Artinya benar bahwa jika f fungsi ganjil yang terintegral pada selang $[-c, c]$ dengan $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ maka terbukti $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$. ■

2. Hasil

Seperti diketahui bahwa suatu fungsi $\boldsymbol{f}$ simetri terhadap titik $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Pada bagian ini akan ditinjau definisi dan sifat dari fungsi simetri terhadap titik $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Awal pembahasan bagian ini akan dimulai dengan bahasan definisi fungsi simetri terhadap titik $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Definisi 2.1. Diberikan $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2$ dan fungsi $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fungsi $\boldsymbol{f}$ disebut simetri terhadap titik $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ jika terdapat fungsi $\boldsymbol{h}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{b};$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, sehingga $\boldsymbol{h}$ merupakan fungsi ganjil.

Dari Definisi 2.1, terlihat bahwa $h(x)$ sebenarnya adalah fungsi $f(x)$ yang digeser sejauh a satuan ke kiri terhadap sumbu x [sejauh a ke kanan jika a negatif] dan digeser sejauh b ke arah bawah terhadap sumbu y [sejauh b ke atas jika b negatif]. Hal ini mengakibatkan titik (a, b) bergeser ke titik $(0,0)$. Jika kurva fungsi $f(x)$ simetri terhadap titik (a, b) maka, $h(x)$ akan simetri terhadap titik $(0,0)$ atau $h(x)$ ganjil.

Lemma 2.2 Jika f fungsi simetri terhadap titik (a, b), maka $f(a) = b$.

Bukti:
Diketahui f fungsi simetri terhadap titik (a, b), akan ditunjukan $f(a) = b$.
Selanjutnya, dengan menggunakan definisi 2.1 terdapat fungsi ganjil h sehingga

$$h(x) = f(x + a) - b.$$

Berdasarkan sifat fungsi ganjil maka $h(0) = 0$, diperoleh

$$h(0) = f(0 + a) - b$$

atau,

$$0 = f(a) - b.$$

Sehingga

$$f(a) = b.$$

Dengan demikian terbukti bahwa $f(a) = b$. ■

Diketahui f fungsi simetri terhadap titik (a, b), maka berdasarkan definisi 2.1 terdapat fungsi ganjil h yang memenuhi persamaan.

$$h(-x) = -h(x). \tag{1}$$

dapat ditulis

$$f(-x + a) - b = -[f(x + a) - b],$$

atau

$$f(-x + a) - b + f(x + a) - b = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh

$$f(a - x) + f(a + x) - 2b = 0,$$

sehingga

$$f(a - x) + f(a + x) = 2b. \tag{2}$$

Selanjutnya, dengan memanfaatkan persamaan (2) ini, diturunkan teorema berikut.

Teorema 2.3 Jika f fungsi simetri terhadap titik (a, b), maka untuk sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$ fungsi αf juga simetri terhadap titik $(a, \alpha b)$.

Bukti :
Diketahui f merupakan fungsi simetri terhadap titik (a, b).
Akan ditunjukan αf simetri terhadap titik $(a, \alpha b)$.
Maka berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$f(a - x) + f(a + x) = 2b$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari persamaan (2) dengan bilangan $\alpha \in \mathbb{R}$, diperoleh.

$$\alpha(f(a - x)) + \alpha(f(a + x)) = \alpha 2b$$
$$\alpha f(a - x) + \alpha f(a + x) = \alpha 2b$$
$$(\alpha f)(a - x) + (\alpha f)(a + x) = 2(\alpha b) \quad (3)$$

Sehingga berdasarkan definisi .21, maka terbukti αf simetri terhadap titik $(a, \alpha b)$. ■

Teorema 2.4 Jika fungsi f dan g simetri terhadap titik (a, b), maka $(f + g)$ merupakan fungsi simetri terhadap titik $(a, 2b)$.

Bukti :
Diketahui f dan g merupakan fungsi-fungsi simetri terhadap titik (a, b),
akan ditunjukan $(f + g)$ simetri terhadap titik $(a, 2b)$.
Maka berdasarkan persamaan (2) dapat ditulis.

$$f(a - x) + f(a + x) = 2b \quad (4)$$

dan

$$g(a - x) + g(a + x) = 2b. \quad (5)$$

Jumlahkan persamaan (4) dan persamaan (5) maka diperoleh.

$$[f(a - x) + f(a + x)] + [g(a - x) + g(a + x)] = 2b + 2b,$$

atau dapat ditulis

$$f(a - x) + g(a - x) + f(a + x) + g(a + x) = 2(2b).$$

Sehingga

$$(f + g)(a - x) + (f + g)(a + x) = 2(2b).$$

Dengan demikian terbukti bahwa $(f + g)$ simetri terhadap $(a, 2b)$. ■

Teorema 2.5 Misal $n \in \mathbb{N}$, jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah fungsi-fungsi simetri terhadap titik (a, b) maka $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ simetri terhadap (a, nb).

Bukti:
Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah fungsi-fungsi simetri terhadap titik (a, b) maka dapat ditulis:

$$f_1(a - x) + f_1(a + x) = 2b$$
$$f_2(a - x) + f_2(a + x) = 2b$$
$$\vdots$$
$$f_n(a - x) + f_n(a + x) = 2b.$$

Jika persamaan-persamaan diatas dijumlahkan maka diperoleh

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)(a - x) + (f_1 + f_2 + \dots + f_n)(a + x) = n(2b) \quad (6)$$

atau dapat ditulis

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)(a - x) + (f_1 + f_2 + \dots + f_n)(a + x) = 2(nb).$$

Dengan demikian berdasarkan (6) diperoleh $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ simetri terhadap (a, nb). ■

Teorema 2.6 Misal $n \in \mathbb{N}$, jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah fungsi-fungsi simetri terhadap titik (a, b) dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ maka $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$ simetri terhadap $(a, (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)b)$.

Bukti:
Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah fungsi-fungsi simetri terhadap titik (a, b) dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ maka dapat ditulis:

$$\alpha_1 f_1(a-x)+\alpha_1 f_1(a+x)=2(\alpha_1 b)$$
$$\alpha_2 f_2(a-x)+\alpha_2 f_2(a+x)=2(\alpha_2 b)$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n f_n(a-x)+\alpha_n f_n(a+x)=2(\alpha_n b).$$

Jika persamaan-persamaan di atas dijumlahkan maka diperoleh

$$(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n)(a-x)+(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n)(a+x)=2\big((\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)b\big). \tag{7}$$

Dengan demikian berdasarkan persamaan (7) diperoleh $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n$ simetri terhadap $(a,(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)b)$. ■

Teorema 2.7 Misalkan $c\in\mathbb{R}$ dengan $c\geq 0$ dan f fungsi simetri terhadap titik (a,b). Jika f terintegral pada selang $[a-c;\ a+c]$, maka

$$\int_{a-c}^{a+c} f(x)dx=2bc$$

Bukti:

Diketahui f fungsi simetri terhadap titik (a,b), maka terdapat fungsi ganjil h sehingga $h(x)=f(x+a)-b$ atau $f(x+a)=h(x)+b$. Oleh karena itu, berdasarkan sifat fungsi ganjil diperoleh

$$\int_{a-c}^{a+c} f(x)dx=\int_{-c}^{c} f(x+a)dx$$

atau dapat tulis

$$\int_{-c}^{c} f(x+a)dx=\int_{-c}^{c} h(x)+b\,dx,$$

berdasarkan sifat integral tentu, diperoleh

$$\int_{-c}^{c} h(x)+b\,dx=\int_{-c}^{c} h(x)dx+\int_{-c}^{c} b\,dx,$$

maka dengan sifat fungsi ganjil, diperoleh

$$\int_{-c}^{c} h(x)+b\,dx=0+bx\Big|_{-c}^{c}$$

Sehingga

$$\int_{-c}^{c} h(x)+b\,dx=b(c)-b(-c)=2bc$$ ■

Teorema 2.8 Jika f adalah fungsi simetri terhadap (a,b) dan g adalah fungsi simetri terhadap (a,c) maka $(f+g)$ simetri terhadap titik $(a,b+c)$.

Bukti:

f simetri terhadap (a,b) berarti

$$f(a-x)+f(a+x)=2b \tag{8}$$

g simetri terhadap (a,c) berarti

$$g(a-x)+g(a+x)=2c \tag{9}$$

jika (8) dan (9) dijumlahkan, maka

$$(f+g)(a-x)+(f+g)(a+x)=2b+2c$$

atau

$$(f+g)(a-x)+(f+g)(a+x)=2(b+c)$$

Dengan demikian $(f+g)$ simetri terhadap $(a,b+c)$. ■

3. Kesimpulan

Fungsi ganjil adalah bentuk khusus dari fungsi simetri terhadap titik (a,b) dengan mengambil nilai $a=b=0$ lebih lanjut sifat fungsi simetri terhadap (a,b) dapat diperluas dari fungsi ganjil dan tetap dipertahankan. Beberapa sifat yang ditinjau adalah titik kesimetrian dari kombinasi linier fungsi-fungsi simetri terhadap titik (a,b) dan nilai integral pada batasan tertentu.

References

[1] Katz, V. J. (2009). *A history of Mathematics.* 3rd ed. Pearson Education, Inc. Boston.
[2] Ubaidillah, F. (2020). Fungsi Simetri Terhadap garis $x = a$ dan sifat-sifatnya. Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*.* 20(2), 45-52
[3] Varberg, D. Purcell, E.J. & Rigdon, S.E. (2010). Kalkulus. 9th ed. Jilid 1, *Penerbit Erlangga*, Indonesia.
[4] Ellis, R. & Gulick, D. (1989). *Calculus with Analytic Geometry.* 5th ed. Saunders Collage Publishing. Fort Worth.
[5] Herman, E. & Strang, G. (2018), *Calculus Volume 1.* Open Stax, Houston.
[6] Anton. H., Wiley, J. & Sons. (1999). *Calculus A New Horison.* 6 Edition. All right reseved. Inc. New york.
[7] Martono, K. (1999). Kalkulus. Penerbit Erlangga*,* Jakarta.