April 2025
Volume 6 Nomor 1

p-ISSN 2723-0325 e-ISSN 2723-0333

# TENSOR

## Pure and Applied Mathematics Journal

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA

is an international academic open-access journal that gains a foothold in mathematics, and its applications are issued twice a year. The focus is to publish original research and review articles on all aspects of pure and applied Mathematics. Editorial board members of the Journal and reviewers will review submitted papers. All submitted articles should report original, previously unpublished research results, experimental or theoretical, and will be peer-reviewed. Articles submitted to the journal should meet these criteria and must not be under consideration for publication elsewhere. Manuscripts should follow the journal template and are subject to both review and editing.

**Published by:**

**Department of Mathematics,**
**Faculty of Science and Technology,**
**Pattimura University.**
**Ambon**
**2025**

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal

Volume 6 Number 1 | April 2025



**Publisher**
Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University, Ambon, Indonesia

**Editorial Address**
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Unversitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon 97233, Provinsi Maluku, Indonesia
Contact : +62 82397854220
Email : tensormathematics@gmail.com

Volume 6 Number 1 | September 2024

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal

TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal
April | Vol. 6 | No. 1 pp. 39-48
p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

# Fungsi Trace dan Fungsi Norm Lapangan Perluasan Atas $\mathbb{Q}$

Novita Dahoklory[1*], Henry W. M. Patty[1]

[1] Program Studi Matematika Jurusan Matematika Universitas Pattimura, Ambon, Indonesia
*Email: novitadahoklory93@gmail.com

Manuscript submitted : February 2025;
Accepted for publication : April 2025.
doi: https://doi.org/10.30598/tensorvol6iss1pp39-48

**Abstrak:** Misalkan Suppose $L/K$ is an extension field where $K \subseteq L$ so that $L$ can be viewed as a vector space over $K$. Moreover, it is known that for every $\alpha \in L$, we can construct a linear transformation $T_\alpha: L \to L$ where $T_\alpha(x) = \alpha x$ for all $x \in L$ so that we have the representation matrix $[T_\alpha]$ of $T_\alpha$. In this study, the trace and norm functions are discussed which are defined using the trace and determinant of the matrix $[T_\alpha]$. Furthermore, this study will also discuss the application of the trace and norm functions in the field of an extension field especially $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ over $\mathbb{Q}$.

2010 Mathematical Subject Classification: 11R32, 13B05
**Kata kunci:** extension field, trace function, norm function.

## 1. Pendahuluan

Diberikan dua buah lapangan $K$ dan $L$. Lapangan $L$ disebut sebagai lapangan perluasan atas $K$ apabila $K \subseteq L$ yang kemudian dinotasikan dengan $L/K$ [1]. Diketahui bahwa lapangan $L$ dapat dipandang sebagai ruang vektor atas $K$ dengan pendefinisian operasi perkalian skalar memanfaatkan operasi perkalian pada lapangan $L$. Lebih khusus, lapangan perluasan $L/K$ disebut sebagai lapangan perluasan berhingga apabila dimensi $L$ sebagai ruang vektor atas $K$ berhingga [1].

Salah satu lapangan perluasan yang paling dikenal adalah $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ yaitu $\mathbb{R}$ merupakan lapangan perluasan dari $\mathbb{Q}$. Dalam hal ini, $\mathbb{R}$ merupakan ruang vektor atas atas $\mathbb{Q}$. Diketahui bahwa basis dari $\mathbb{R}$ tidak berhingga yang berarti $\mathbb{R}$ bukan lapangan perluasan berhingga. Hal ini kemudian memotivasi konstruksi lapangan perluasan berhingga $L$ atas $\mathbb{Q}$ yang lebih kecil dari $\mathbb{R}$ yaitu $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$.

Salah satu kontruksi lapangan perluasan yang adalah lapangan $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}\}$ dengan menggunakan konsep elemen aljabar pada $\mathbb{R}$. Suatu $\alpha \in \mathbb{R}$ disebut sebagai elemen aljabar atas $\mathbb{Q}$ jika terdapat polynomial $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$ yaitu $\alpha$ merupakan akar dari $\mathbb{Q}[x]$ [2]. Salah satu sifat pada suatu elemen aljabar $\alpha$ adalah eksistensi suatu polinomial tak tereduski dengan derajat terkecil $m_\alpha(x)$ yang memuat $\alpha$ sebagai akar yang kemudian disebut sebagai polynomial minimal dari $\alpha$ [1].

Konsep elemen aljabar kemudian memotivasi pembentukan lapangan terkecil yang memuat $\mathbb{Q}$ dan suatu elemen aljabar $\alpha$ yang kemudian dinotasikan dengan $\mathbb{Q}(\alpha)$. Diketahui bahwa $\mathbb{Q}(\alpha)$ sendiri merupakan perluasan atas $\mathbb{Q}$. Dengan kata lain, $\mathbb{Q}(\alpha)$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{Q}$.

Salah satu sifat yang berlaku pada lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\alpha)$ adalah $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ merupakan basis basis dari $\mathbb{Q}(\alpha)$ dengan $n$ merupakan derajat dari $m_\alpha(x)$ dengan $m_\alpha(x)$ merupakan polinomial minimal dari $\alpha$. Sebagai contoh lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ dengan polinomial minimal $\sqrt[3]{2}$ adalah dari

$x^3 - 2$ sehingga basis dari $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$.

Di sisi lain, pada struktur suatu lapangan perluasan $L/K$ sebagai ruang vektor, dapat dibentuk suatu transformasi linear dengan memanfaatkan setiap $\alpha \in L$ yaitu

$$T_\alpha : L \to L$$

dengan $T_\alpha(x) = \alpha x$ untuk setiap $x \in L$. Diketahui bahwa transformasi linear $T_\alpha$ dapat direprsentasikan dengan suatu matriks yaitu $[T_\alpha]$ yang disebut sebagai matriks representasi [3]. Lebih lanjut, diketahui entri dari matriks $[T_\alpha]$ adalah elemen di $K$ sehingga determinan dan trace dari matriks $[T_\alpha]$ juga merupakan berada di dalam lapangan $K$. Dengan memanfaatkan fenomena tersebut, dibentuk fungsi

$$Tr_{K/L} : L \to K \text{ dan } N_{K/L} : L \to K$$

dengan masing-masing fungsi didefinisikan sebagai $Tr_{K/L}(\alpha) = tr([T_\alpha])$ dan $N_{K/L}(\alpha) = det([T_\alpha])$ yang kemudian disebut sebagai fungsi trace dan norm dari $L/K$ [4].

Dalam penelitian ini, akan bahas beberapa sifat dasar dari fungsi trace dan norm dari suatu lapangan perluasan $L/K$. Selanjutnya akan diberikan beberapa sifat dasar yang berlaku serta penerapan terkait fungsi trace dan fungsi norm pada suatu lapangan perluasan khususnya pada lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ atas lapangan $\mathbb{Q}$.

## 2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas lapangan perluasan serta fungsi trace dan fungsi norm dalam suatu lapangan perluasan. Adapun dasar teori mengenai ring dan ruang vektor yang menjunjang penelitian ini merujuk pada [5] dan [6].

### 2.1. Lapangan Perluasan

Pada bagian ini akan dibahas lapangan perluasan khususnya lapangan perluasan berhingga. Selanjunya akan dibahas elem aljabar dalam suatu lapangan perluasan yang memotivasi pembentukan lapangan $\mathbb{Q}(\alpha)$.

**Definisi 1.** [1]
Diberikan lapangan $K$ dan $L$. Lapangan $L$ disebut sebagai lapangan perluasan atas $K$ jika $K \subseteq L$.

**Contoh 2.**

1. Lapangan $\mathbb{R}$ merupakan lapangan perluasan dari $\mathbb{Q}$
2. Lapangan $\mathbb{C}$ merupakan lapangan perluasan dari $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$.

**Definsi 3**. [1]
Diberikan suatu lapangan perluasan $L/K$. Lapangan $L$ disebut lapangan perluasan berhingga jika $[L:K] < \infty$.

**Contoh 4.**

1. Lapangan $\mathbb{R}$ merupakan bukan merupakan lapangan perluasan berhingga dari $\mathbb{Q}$
2. Lapangan $\mathbb{C}$ merupakan lapangan perluasan berhingga atas $\mathbb{R}$ dengan basis $\{1, i\}$.

Sifat $\mathbb{R}$ yang bukan merupakan lapangan perluasan berhingga dari $\mathbb{Q}$ di atas kemudian memotivasi konstruksi lapangan perluasan berhingga $L$ atas $\mathbb{Q}$ yang lebih kecil dari $\mathbb{R}$ yaitu $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$ dengan menggunakan konsep elemen aljabar yang didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 5.** [1]
Diberikan lapangan perluasan $L/K$. Suatu $\alpha \in L$ disebut aljabar atas $K$ apabila terdapat suatu polinomial $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$. Dengan kata lain, $\alpha$ merupakan akar dari $f(x)$.
Berdasarkan definisi di atas, suatu $\alpha \in L$ disebut aljabar atas $K$ jika $\alpha$ merupakan akar suatu $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$ yaitu $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n = 0$.

**Contoh 6.**

Diberikan suatu lapangan perluasan $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Elemen $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aljabar atas $\mathbb{Q}$ karena terdapat $x^2 - 2, x^4 - 4 \in \mathbb{Q}[x]$ dengan salah satu akar yaitu $\sqrt{2}$.

Selanjutnya akan diberikan polinomial yang memuat suatu elemen aljabar sebagai akar dalam Lema berikut.

**Lema 7.**

Diberikan suatu lapangan perluasan $L/K$. Jika $\alpha$ merupakan elemen aljabar atas $K$ maka terdapat polinomial $p(x)$ dengan $p(x)$ tak tereduksi dengan derajat terkecil yang memuat $\alpha$ sebagai akar yaitu $p(\alpha) = 0$.

**Bukti**

Diketahui lapangan perluasan $L/K$dengan $\alpha$ merupakan elemen aljabar atas $K$. Pertama-tama dibentuk terlebih dahulu fungsi

$$\varphi_\alpha : K[x] \to K(\alpha)$$

dengan $\varphi_\alpha\big(f(x)\big) = f(\alpha)$. Jelas bahwa $\varphi_\alpha$ merupakan homomorfisma ring. Berdasarkan sifat $K$ sebagai lapangan berlaku $K[x]$ merupakan daerah ideal utama sehingga $ker(\varphi_\alpha) =< p(x) >$ untuk suatu $p(x) \in K[x]$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $p(x)$ tak tereduksi dengan derajat terkecil yang memuat $\alpha$ sebagai akar yaitu $p(\alpha) = 0$.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $p(x)$ merupakan polinomial dengan derajat terkecil sedemikian sehingga $p(\alpha) = 0$ . Misalkan $f(x) \in K[x]$ dengan $f(\alpha) = 0$ yang berarti $f(x) \in ker(\varphi_\alpha) =< p(x) >$ . Jadi, $f(x) = p(x)q(x)$ untuk suatu $q(x) \in K[x]$ sehingga $\deg(p(x)) \leq \deg(f(x))$. Oleh karena itu, diperoleh $p(x)$ merupakan polinomial dengan derajat terkecil yang memuat $\alpha$ sebagai akar.

(ii) Diandaikan $p(x)$ tereduksi yaitu $p(x) = r(x)s(x)$ dengan $\deg(r(x)), \deg(s(x)) < \deg(p(x))$ . Jadi, diperoleh $p(\alpha) = r(\alpha)s(\alpha) = 0$. Karena $E$ merupakan lapangan, diperoleh $r(\alpha) = 0$ atau $s(\alpha) = 0$ . Hal ini menimbulkan kontradiksi karena $p(x)$ merupakan polinomial dengan derajat terkecil yang memuat $\alpha$ sebagai akar.

Lema di atas menjamin eksistensi polinomial poliomial tal tereduksi $f(x)$ dengan derajat terkecl, yang memuat suatu elemen aljabar $\alpha$ sebagai akar sehingga memotivasi definisi berikut.

**Definisi 8.** [1]

Diberikan lapangan perluasan $L/K$ dengan $\alpha$ suatu elemen aljabar atas $K$. Suatu $m_\alpha(x)$ disebut polinomial minimal dari $\alpha$ apabila untuk setiap $f(x) \in K[x]$ dengan $f(\alpha) = 0$ maka $deg(m_\alpha(x)) \leq deg((f(x)))$.

**Contoh 9.**

Diberikan suatu lapangan perluasan $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Elemen $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ merupakan elemen aljabar atas $\mathbb{Q}$ dengan $m_{\sqrt{2}}(x) = x^2 - 2$ merupakan polinomial minimal dari $\sqrt{2}$.

Berikut akan diberikan sifat yang berhubungan dengan $m_\alpha(x)$ dan $K(\alpha)$ sebagai ruang vektor atas lapangan $K$. Dari sifat teori ring, diketahui bahwa ideal yang dibangun oleh $m_\alpha(x)$ yang dinotasikan sebagai $< m_\alpha(x)>$ merupakan ideal maksimal sehingga $K[x]/< m_\alpha(x) >$ merupakan lapangan.

Pada Lema berikut akan diberikan hubungan antara $K[x]/< m_\alpha(x) >$ dan $K(\alpha)$ sebagai lapangan.

**Lema 10.**

Diberikan lapangan perluasan $L/K$. Jika $\alpha$ merupakan elemen aljabar atas $K$ maka $K(\alpha) \cong K[x]/< m_\alpha(x) >$.

**Bukti**

Dibentuk homomorfisma ring

$$\varphi_\alpha : K[x] \to K(\alpha)$$

dengan $\varphi_\alpha\big(f(x)\big) = f(\alpha)$. Jelas bahwa $\varphi_\alpha$ merupakan homomorfisma ring. Berdasarkan **Lema 7**, diperoleh

$ker(\varphi_\alpha) =< m_\alpha(x) >$ . Diperhatikan bahwa $\alpha = \varphi_\alpha(x)$ dan $c = \varphi_\alpha(c)$ untuk setiap $c \in K$. Jadi, $im(\varphi_\alpha) = K(\alpha)$. Menurut teorema utama homomorfisma, didapatkan $K(\alpha) \cong K[x]/< m_\alpha(x) >$.

Perlu diperhatikan bawha $K$ merupakan subfield dari $K(\alpha)$ sehingga menjamin adanya basis dari $K(\alpha)$ atas $K$.

Dalam sifat berikut, akan diberikan sifat basis dari $K(\alpha)$ yang berkaitan dengan polinomial minimal dari $\alpha$ yaitu $m_\alpha(x)$.

**Lema 11.**

Misalkan $L/K$ merupakan lapangan perluasan. Jika $\alpha \in L$ merupakan elemen aljabar dengan minimal polinomial $f(x) \in K[X]$ berdererajat $n$ maka himpunan $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ merupakan basis dari $K(\alpha)$.

**Bukti**

Diketahui $\alpha \in L$ merupakan elemen aljabar atas $K$. Akan ditunjukkan bahwa $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ merupakan basis dari $K(\alpha)$. Dalam hal ini akan ditunjukkan bahwa setiap elemen $x \in K(\alpha)$ dapat ditulsikan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$.

Diambil sebarang $x \in K(\alpha)$. Berdasarkan **Lema 2.10**, diperoleh $K(\alpha) \cong K[x]/< m_\alpha(x) >$ sehingga

$$x = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

untuk suatu $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in K$. Selanjutnya, dimisalkan

$$x = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

dan

$$x = d_0 + d_1\alpha + d_2\alpha^2 + \cdots + d_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Akibatnya,

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)\alpha + \cdots + (c_{n-1} - d_{n-1})\alpha^{n-1} = 0.$$

Dengan kata lain, terdapat

$$g(x) = (c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)x + \cdots + (c_{n-1} - d_{n-1})x^{n-1}$$

sedemikian sehingga $g(\alpha) = 0$. Diperhatikan juga bahwa $deg\,(g(x)) < deg\,(m_\alpha(x))$ yang berarti $g(x) = 0$. Akibatnya

$$c_i - d_i = 0$$

yaitu $c_i = d_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n-1$.

Terbukti, $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ merupakan basis dari $K(\alpha)$.

Selanjutnya diberikan penggunaan Lema di atas dalam menentukan basis dari suatu lapangan perluasan $K(\alpha)$ yang disajikan pada contoh di bawah ini.

**Contoh 12.**

1. Diberikan lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ dengan polinomial minimal dari $\sqrt{2}$ adalah $x^2 - 2$ Berdasarkan **Lema 11**, himpunan $\{1, \sqrt{2}\}$ merupakan basis dari $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ yang berarti $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$.
2. Diberikan lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ dengan polinomial minimal $x^3 - 2$. Menurut **Lema 11**, himpunan $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ merupakan basis dari $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ yaitu $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

## 2.2. Matriks Representasi Suatu Transformasi Linear Lapangan Perluasan

Diberikan suatu lapangan perluasan $L/K$. Diketahui bahwa untuk setiap $\alpha \in L$ dapat dibentuk suatu transformasi linear

$$T_\alpha : L \to L$$

dengan $T_\alpha(x) = \alpha . x$ untuk setiap $x \in L$.

Berikut sifat-sifat dasar dari transformasi linear $T_\alpha$ dengan $\alpha \in L$.

**Lema 13.**

Diberikan lapangan perluasan $L/K$. Untuk setiap $\alpha, \beta \in L$ berlaku

1. Jika $\alpha \neq \beta$ maka $T_\alpha \neq T_\beta$;
2. $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha + T_\beta$ dan $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \circ T_\beta$;
3. $T_1$ merupakan identitas $id: L \to L$.

**Bukti**

Diberikan lapangan perluasan $L/K$. Diambil sebarang $\alpha, \beta \in L$.

1. Misalkan $\alpha \neq \beta$. Akan ditunjukkan bahwa $T_\alpha \neq T_\beta$. Diperhatikan bahwa $T_\alpha(1) = \alpha.1 = \alpha$ dan $T_\beta(1) = \beta.1 = \beta$. Jadi, $T_\alpha(1) \neq T_\beta(1)$ sehingga $T_\alpha \neq T_\beta$.
2. Akan ditunjukkan bahwa $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha + T_\beta$ dan $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \circ T_\beta$;
   a. $T_{\alpha+\beta}(x) = (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x = T_\alpha(x) + T_\beta(x) = (T_\alpha + T_\beta)(x)$

   dan

   b. $T_{\alpha\beta}(x) = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha(T_\beta(x)) = T_\alpha(T_\beta(x)) = T_\alpha \circ T_\beta(x)$.

   Jadi, $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha + T_\beta$ dan $T_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$.
3. Akan ditunjukkan $T_1$ merupakan fungsi identitas identitas $id: L \to L$. Diambil sebarang $x \in L$. Diperoleh, $T_1(x) = 1.x = x$. Dengan kata lain, $T_1: L \to L$ merupakan fungsi identitas.

Misalkan lapangan perluasan berhingga $L/K$ dengan basis $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ sehingga untuk setiap $x \in L$ dapat dinyatakan secara tunggal dengan $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$. Hal ini kemudian memunculkan vektor koordinat terhadap basis $B$ yaitu $[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

**Definisi 14. [3]**

Misalkan lapangan perluasan berhingga $L/K$ dengan basis $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ sehingga untuk setiap $x \in L$ dapat dinyatakan secara tunggal dengan $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$. Hal ini kemudian memunculkan vektor koordinat terhadap basis $B$ yaitu $[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

**Definisi 15. [3]**

Diberikan lapangan perluasan $L/K$ dan suatu transformasi linear $T: L \to L$. Misalkan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ merupakan basis dari $L$. Dengan memanfaatkan vektor koordinat basis, dapat dikonstruksikan suatu matriks yang disebut sebagai matriks representasi dari $T$ relatif terhadap basis $B$ yang dinotasikan dengan $[T]_B$ yaitu

$$[T]_B = ([T(b_1)]_B \quad [T(b_2)]_B \quad \cdots \quad [T(b_n)]_B)$$

dengan $[T(b_i)]_B$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ menyatakan kolom pada matriks $[T]_B$.

Diberikan lapangan perluasan $L/K$ dan suatu $\alpha \in L$. Jelas bahwa dapat dibentuk matriks representasi dari $T_\alpha$ yaitu $[T_\alpha]_B$. Selanjutnya akan diberikan contoh matriks representasi $[T_\alpha]_B$ khususnya pada lapangan perluasan yang berbentuk $K(\alpha)/K$ yang disajikan dalam contoh berikut ini.

**Contoh 16.**

Diberikan lapangan perluasan $L/K$ dengan $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dan $K = \mathbb{Q}$ dengan basis $B = \{1, \sqrt{2}\}$. Misalkan $\alpha = a + b\sqrt{2}$ dan suatu transformasi linear $T_\alpha: L \to L$ dengan $x \mapsto \alpha.x$. Didapatkan,

$$T_\alpha(1) = \alpha.1 = a.1 + b.\sqrt{2}$$

$$T_\alpha(\sqrt{2}) = \alpha.\sqrt{2} = 2b.1 + a.\sqrt{2}$$

Diperoleh, $[T_\alpha]_B = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$. Sebagai ilustrasi, misalkan $\alpha = 1 + 3\sqrt{2}$. Diperoleh $[T_\alpha]_B = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

## 2.3. Fungsi Norm dan Trace Pada Lapangan Perluasan

Pada bagian ini akan dibahas fungsi trace dan norm dari suatu lapangan perluasan meliputi definisi, sifat-sifat dasar, dan beberapa contoh dari fungsi trace dan norm. Selanjutnya akan diberikan penerapan dari fungsi trace dan norm dari suatu lapangan perluasan $L/K$ khususnya $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

Diberikan lapangan perluasan $L/K$ dan suatu $\alpha \in L$ dengan transformasi linear $T_\alpha: L \to L$. Diperhatikan bahwa berlaku sifat-sifat untuk matriks representasi $[T_\alpha]$ sebagai berikut

1. $tr([T_\alpha]_B), det([T_\alpha]_B \in K$
2. $tr([T_\alpha]_B) = tr([T_\alpha]_C)$ dan $det([T_\alpha]_B) = det([T_\alpha]_C)$

untuk setiap basis $B$ dan $C$ dari $L$ [3].

**Definisi 17. [4]**

Diberikan lapangan perluasan $L/K$. Suatu fungsi

$$tr_{L/K}: L \to K$$
$$\alpha \mapsto Tr[T_\alpha]$$

dan

$$N_{L/K}: L \to K$$
$$\alpha \mapsto det[T_\alpha]$$

disebut sebagai fungsi trace dan norm dari lapangan perluasan $L/K$.

Untuk memperjels definisi di atas, diberikan contoh fungsi trace dan norm dari lapangan perluasan atas $\mathbb{Q}$

**Contoh 18.**

Berdasarkan **Contoh 12**, diketahui bahwa lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ dengan basis yaitu $B = \{1, \sqrt{2}\}$. Misalkan $\alpha = a + b\sqrt{2}$ dan suatu transformasi linear $T\alpha: L \to L$ dengan $x \mapsto \alpha.x$. Didapatkan,

$$T_\alpha(1) = \alpha.1 = a.1 + b.\sqrt{2}$$

dan

$$T_\alpha(\sqrt{2}) = \alpha.\sqrt{2} = 2b.1 + a.\sqrt{2}$$

Diperoleh, $[T_\alpha]_B = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$. Jadi, $Tr(\alpha) = a + a = 2a$ dan $N(\alpha) = det[T_\alpha] = a^2 - 2b^2$.

Selanjutnya, akan diberikan sifat dari fungsi trace dari $L/K$ yaitu $Tr_{L/K}: L \to K$ sebagai berikut.

**Teorema 19.**

Jika $K/L$ merupakan lapangan perluasan maka $Tr_{L/K}: L \to K$ merupakan transformasi linear.

**Bukti**

Diketahui $L/K$ merupakan lapangan perluasan. Diambil sebarang $c \in K$ dan $\alpha, \beta \in L$ dengan $[T_\alpha]$ dan $[T_\beta]$ masing-masing merupakan matriks representasi dari transformasi linear $T_\alpha$ dan $T_\beta$. Dengan memanfaatkan **Lema 13** dan sifat trace dua buah matriks, didapatkan

$$\begin{aligned} Tr_{L/K}(\alpha+\beta) &= tr_{L/K}[T_{\alpha+\beta}] \\ &= tr_{L/K}[T_\alpha + T_\beta] \\ &= tr_{L/K}([T_\alpha] + [T_\beta]) \end{aligned}$$

$$= tr_{L/K}[T_\alpha] + tr_{L/K}[T_\beta]$$
$$= Tr_{L/K}(\alpha) + Tr_{L/K}(\alpha)$$

dan

$$\begin{aligned} Tr_{L/K}(c\alpha) &= tr_{L/K}([T_{c\alpha}]) \\ &= tr_{L/K}(c[T_\alpha]) \\ &= c.tr_{L/K}([T_\alpha]) \\ &= c.Tr_{L/K}(\alpha). \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa $Tr_{L/K}: L \to K$ merupakan transformasi linear.

Dengan menggunakan sifat determinan yang mengawetkan operasi perkalian dua buah matriks dan elemen unit dalam $L$, berikut diberikan sifat dari fungsi $N_{L/K}: L \to K$ yang disajikan dalam Teorema di bawah ini.

**Teorema 2.20.**

Diberikan lapangan perluasan $L/K$ dengan fungsi $N_{L/K}: L \to K$. Berlaku

1. $N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha)N_{L/K}(\beta)$ untuk setiap $\alpha, \beta \in L$;
2. $N_{L/K}(\gamma) \neq 0$ untuk semua $\gamma \in K$ dengan $\gamma \neq 0$.

**Bukti.**

Diketahui $L/K$ merupakan lapangan perluasan dengan fungsi norm berikut

$$N_{L/K}: L \to K$$
$$\alpha \mapsto det([T_\alpha]).$$

1. Diambil sebarang $\alpha, \beta \in L$. Dengan menggunakan **Lemma 13** dan sifat determinan matriks, diperoleh

$$\begin{aligned} N_{L/K}(\alpha\beta) &= det([T_\alpha\beta]) \\ &= det([T_\alpha][T_\beta]) \\ &= det([T_\alpha])det([T_\beta]) \\ &= N_{L/K}(\alpha)N_{L/K}(\beta) \end{aligned}$$

2. Diambil sebarang $\gamma \in L$ dengan $\gamma \neq 0$. Berdasarkan **Lema 13**, diperoleh

$$N_{L/K}(1) = det[T_1] = det(I) = 1.$$

Jadi, $1 = N_{L/K}(1) = N_{L/K}(\gamma\gamma^{-1}) = N_{L/K}(\gamma)N_{L/K}(1/\gamma)$. Dengan demikian, dipeorleh $N_{L/K}(\gamma)$ merupakan unit di lapangan $K$. Dengan kata lain, $N_{L/K}(\gamma) \neq 0$.

## 2.4. Penerapan Trace dan Norm Pada Lapangan Perluasan

Pada bagian ini akan diberikan beberapa penarapan trace dan norm yang didefinisikan dari suatu lapangan perluasan.

Diberikan lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ dengan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Dengan menggunakan trace dan norm, akan ditunjukkan bahwa

1. $1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ bukan merupakan kuadrat sempurna di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
2. Diberikan lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$. Dengan menggunakan trace dan norm, akan ditunjukkan bahwa $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

**Contoh 3.21.**

Diberikan lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ dengan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Dengan menggunakan trace dan norm, akan ditunjukkan bahwa $1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ bukan merupakan kuadrat sempurna di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ dengan metode kontradiksi.

Diandaikan $1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ merupakan kuadrat sempurna. Dengan kata lain, terdapat $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} = (a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^2$. Oleh karena itu,

$$1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} = (a^2 + 4bc) + (2ab + 2c^2)\sqrt[3]{2} + (2ac + b^2)\sqrt[3]{4}.$$

Oleh karena itu, perlu dihitung solusi persamaan $a^2 + 4bc = 1$ , $2ab + 2c^2 = 5$, dan $2ac + b^2$. Selanjutnya, digunakan metode pendekatan fungsi norm dari lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ dengan menggunakan basis $B = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$.

Tulis $\alpha = 1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$. Dibentuk matriks representasi $[T_\alpha]_B$ yaitu

$$T_\alpha(1) = 1.\alpha = 1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$$

$$T_\alpha(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\alpha = -2 + \sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4}$$

$$_\alpha(\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{4}\alpha = 10 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

Jadi, $[m_\alpha]_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Diperoleh $N_{K/L}(\alpha) = det([T_\alpha]) = 277$. Menurut **Teorema 20**, diperoelh $N_{K/L}(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^2 = N_{K/L}(\alpha) = N_{K/L}(1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) = 277$ . Hal ini menimbulkan kontradiksi karena $277$ merupakan bilangan prima.

Dengan demikian, diperoleh $1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ bukan merupakan kuadrat sempurna di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

**Contoh 22.**

Diberikan lapangan perluasan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})//\mathbb{Q}$. Dengan menggunakan trace dan norm, akan ditunjukkan bahwa $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ dengan metode kontradiksi.

Diandaikan $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ yaitu terdapat $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$. Jadi,

$$\begin{aligned} 3 &= (a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^3 \\ &= (a^3 + 2b^3 + 4c^3 + 12abc) + (3a^2b + 6ac^2 + 6b^2c)\sqrt[3]{2} + (3a^2c + 3ab^2 + 6bc^2)\sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

Dengan memanfaatkan fungsi trace akan dihitung nilai $a, b, c$ yang memenuhi persamaan di atas. Diperhatikan bahwa $B = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ dan $C = \{1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\}$ masing-masing merupakan basis dari $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ dan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ sebagai ruang vektor atas $\mathbb{Q}$. Diketahui bahwa

$$[T_{\sqrt[3]{2}}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$[T_{\sqrt[3]{2}}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sehingga $Tr(\sqrt[3]{2}) = tr([T_{\sqrt[3]{2}}]_B) = 0$ dan $Tr(\sqrt[3]{4}) = tr([T_{\sqrt[3]{4}}]_B) = 0$. Berdasarkan **Teorema 20**, diperoleh

$$\begin{aligned} Tr(\sqrt[3]{3}) &= Tr(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \\ &= aTr(1) + bTr(\sqrt[3]{2}) + cTr(\sqrt[3]{4}) \\ &= atr([T_1]) + 0 + 0 \\ &= atr([T_1]) + 0 + 0 \\ &= 3a. \end{aligned}$$

Karena $Tr(\sqrt[3]{2}) = 0$, diperoleh $3a = 0$ sehingga $a = 0$. Jadi, $\sqrt[3]{3} = b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ sehingga

$$\sqrt[3]{6} = b\sqrt[3]{4} + 2c$$

Berdasarkan **Lema 11**, didapatkan $D = \{1, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{36}\}$ merupakan basis dari $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$. Karena $\sqrt[3]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, diperoleh $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$. Jadi, $D$ juga merupakan basis dari $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Sehingga,

$$[T_{\sqrt[3]{6}}]_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jadi,

$$0 = Tr(\sqrt[3]{6}) = 2c.Tr(1) + b. = 6c$$

sehingga $c = 0$. Didapatkan

$$\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 + b\sqrt[3]{2} + 0.\sqrt[3]{4}$$

Jadi, $3 = 2b^3$ sehingga $b^3 = 3/2$ dengan $b$ tidak memiliki solusi rasional sehingga menimbulkan kontradiksi. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

## 3. Kesimpulan

Diberikan suatu lapangan perluasan $L/K$. Berlaku

1. Dengan menggunakan sifat lapangan perluasan $L/K$ sebagai ruang vektor, dapat dikonstruksikan fungsi trace dan norm yaitu

$$Tr_{L/K}: L \to K \text{ dan } N_{L/K}: L \to K$$

dengan fungsi trace $Tr_{L/K}$ merupakan transformasi linear dan fungsi norm $N_{L/K}$ mengawetkan oeprasi perkalian dan elemen unit di $L$.

2. Dengan menggunakan pendekatan fungsi trace dan norm dapat diterapkan pada lapangan perluasan salah satunya pada lapangan perluasan $L/K$ dengan $K = \mathbb{Q}$ dan $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
   (a) $1 + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ bukan merupakan kuadrat sempurna di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
   (b) $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

## 4. Daftar Pustaka


[1] Lidl, R., & Niederreiter, H. (1986). Introduction to Finite Fields and Their Applications. Cambridge: Cambridge University Press.

[2] Morandi, P. (2007). *Fields and Galois theory*. New York: Springer.

[3] Roman, S. (2005). *Advanced linear algebra*. New York: Springer.

[4] Conrad, K. (2012). *Trace and norm* (Lecture notes: Algebraic Number Theory).

[5] Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Sen, M.K. (2007). Fundamentals of Abstract Algebra. The McGraw-Hill Companies, Inc.

[6] Lang, S. (1993). *Algebra* (3rd ed.). New York: Addison-Wesley.