

## Analisis Stabilitas dan Simulasi Model Penyebaran Penyakit HIV/AIDS Tipe SIA (*Susceptible, Infected, Abstained*)

Zeth Arthur Leleury<sup>1\*</sup>, Francis Yunito Rumlawang<sup>2</sup>, Alva Grace Naraha<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Ambon, Indonesia,  
Email: [zetharthur82@gmail.com](mailto:zetharthur82@gmail.com)

<sup>2</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Ambon, Indonesia,  
Email: [rumlawang@gmail.com](mailto:rumlawang@gmail.com)

<sup>3</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Ambon, Indonesia

Manuscript submitted : February 2020

Accepted for publication : April 2020

---

**Abstract:** HIV/AIDS is a disease that continues to grow and become a global problem that requires special attention. This can be seen from the high number of cases of HIV/AIDS every year. In this study, we discussed an analysis of stability of a point equilibrium and numerical simulation for the spread of HIV/AIDS. The mathematical models that we used is SIA (*Susceptibles, Infected, Abstained*) model. The model of SIA assumed that sub populations infected will increase because of the influence of the transmission rate sub populations infected to sub population susceptibles. However, mode of transmission of HIV is possible if the transmission of individual of sub populations abstained to individual of sub population susceptibles. The result of the model indicate that population growth rate is determined by these parameters: birth, death, interaction and isolation. Based on the result of the model simulation showed that the impact of the sub populations abstained would affect so reduced sub population infected.

2010 Mathematical Subject Classification : 93A30, 37M99

**Key words:** HIV/AIDS, Numerical simulation, SIA model, Stability analysis

---

### 1. Pendahuluan

HIV atau *Human Immunodeficiency Virus* adalah sejenis virus yang menyerang atau menginfeksi sel darah putih yang menyebabkan turunnya kekebalan tubuh manusia. Sedangkan AIDS atau *Acquired Immunodeficiency Syndrome* adalah sekumpulan gejala penyakit yang timbul karena turunnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh HIV. Akibat menurunnya kekebalan tubuh maka orang tersebut sangat mudah terkena berbagai penyakit infeksi (infeksi oportunistik) yang sering berakibat fatal [1]. Sampai dengan tahun 2017, terdapat 36,9 juta orang hidup dengan HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) di seluruh dunia[2]. Infeksi baru HIV di seluruh dunia pada 2017 mencapai 1,8 juta orang [3]. Di Indonesia, sejak 2005 sampai dengan Maret 2019, jumlah kasus HIV yang dilaporkan mencapai 338.363 orang[4], sedangkan jumlah kondisi AIDS yang dilaporkan sejak pertama kali ditemukan pada 1987 sampai dengan Maret 2019 mencapai 115.601 orang [5]. Kasus AIDS dilaporkan telah menyebar di 33 provinsi di Indonesia sejak penghujung tahun 2009 [6]. Jumlah individu yang terinfeksi virus HIV/AIDS hingga saat ini masih lebih dominan terhadap kelompok usia produktif yang diakibatkan pola perilaku hidup yang berisiko seperti seks bebas yang tidak aman dan penggunaan narkoba melalui jarum suntik.

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem fisik atau suatu problema pada dunia real ke dalam pernyataan matematika [7]. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai model matematika. Pemodelan matematika terhadap penyakit HIV/AIDS sudah cukup banyak dilakukan oleh para peneliti. Salah satu model matematika penyebaran HIV/AIDS yaitu model matematika *Susceptible (S)*, *Infected (I)*, dan *abstained (A)*. Dalam model *SIA* diasumsikan sub populasi *I* akan bertambah karena pengaruh tingkat penularan sub populasi *I* terhadap sub populasi *S*. Akan tetapi, cara penularan virus HIV juga sangat memungkinkan jika penularannya dari individu-individu pada sub populasi *A* terhadap individu-individu pada sub populasi *S*. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini dibangun model *SIA* tentang penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan modifikasi dari model yaitu berupa penambahan tingkat penularan dari individu-individu pada sub populasi *A* terhadap individu individu pada sub populasi *S*. Tujuan dari penelitian ini menentukan titik kesetimbangan dan hasil simulasi model *SIA* pada penyebaran penyakit HIV/AIDS.

### 1.1. Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* merupakan suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Prosedurnya adalah sebagai berikut.

a. Persamaan polinom orde ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

dengan koefisien-koefisien adalah besaran nyata dan  $a_n \neq 0$ .

b. Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negatif disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (sistem tak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.

c. Bila semua koefisien positif, buat tabel *Routh* seperti yang ditunjuk pada Tabel 1.

Tabel 1 Tabel *Routh*

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$	$a_{n-1}$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$	$a_n$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$	$b_n$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\dots$	$c_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^0$						

dimana nilai  $b_i, c_i, \dots$  didefinisikan sebagai berikut:

$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$
$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$
$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$	$c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$
$\vdots$	$\vdots$

$$\frac{b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}}{c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}}$$

- d. Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel *Routh*.
- e. Syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik positif dan syarat cukup untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel *Routh* bertanda positif.

Kriteria *Routh-Hurwitz* tidak dapat menjelaskan bagaimana memperbaiki kestabilan relatif atau bagaimana menstabilkan sistem tak stabil, tetapi dapat digunakan untuk menentukan batas penguatan suatu sistem agar masih stabil [8].

### 1.2. Bilangan Reproduksi Dasar

Kemungkinan terjadinya infeksi pada suatu populasi tergantung pada bilangan reproduksi. Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) merupakan parameter penting dalam matematika epidemiologi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan ini diperoleh dengan cara menentukan nilai eigen matriks Jacobian pada titik setimbang bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik setimbang endemik (*endemic equilibrium*). Jika  $R_0 < 1$  maka jumlah individu yang terinfeksi penyakit berkurang, sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka jumlah individu yang terinfeksi bertambah [9].

## 2. Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan adalah penelitian murni berupa studi literatur dengan menggunakan model SIA pada penyebaran penyakit HIV/AIDS. Adapun tahapan penelitian sebagai berikut: membangun model matematika SIA yang berkaitan dengan penyebaran penyakit HIV/AIDS, menganalisis kedinamikan model untuk mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, menganalisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan model, menghitung nilai bilangan reproduksi dasar, dan melakukan simulasi untuk mendapatkan trayektori dari setiap parameter.

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. Model Matematika HIV

Pada umumnya ada banyak faktor yang menyebabkan terjadinya infeksi HIV pada manusia baik secara internal maupun eksternal. Namun pada penelitian ini, dibentuk asumsi-asumsi yang membatasi kasus infeksi HIV dan struktur populasi sebagai berikut :

$S'$  adalah laju perkembangan subpopulasi yang sehat terhadap waktu

$I'$  adalah laju perkembangan subpopulasi yang infeksi terhadap waktu

$A'$  adalah laju perkembangan subpopulasi yang dikarantina terhadap waktu

$\beta$  adalah laju total kelahiran secara alami yang dihasilkan per satu individu yang ada pada populasi per satuan waktu

$\mu + bP$  merupakan laju kematian per satu individu dan  $b$  merupakan koefisien linier

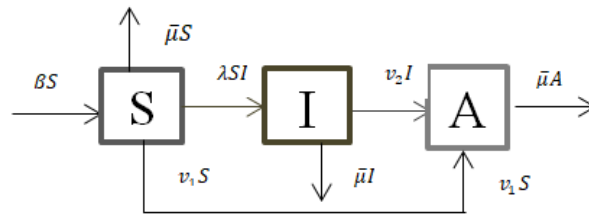
$\lambda$  merupakan laju tingkat infeksi terhadap populasi yang sehat

$P$  adalah total populasi

$v_1$  adalah tingkat transisi dari kelas *susceptible* ke kelas *abstained*

$v_2$  adalah tingkat transisi dari kelas *infected* ke kelas *abstained*

Dari asumsi-asumsi tersebut didapatkan diagram kompartemen sebagai berikut :



Gambar 1. Diagram kompartemen model epidemik transmisi vertikal bertipe SIA

Dengan persamaan dinamis model matematika adalah

$$\frac{dS}{dt} = \beta(S + I) - \lambda SI - \bar{\mu}S - v_1S \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda SI - \bar{\mu}I - v_2I \tag{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = v_1S + v_2I - \bar{\mu}A \tag{3}$$

dengan  $\bar{\mu} = [\mu + b(P)]$  dan  $P = S + I + A$  dimana  $v_1 < v_2$ .

### 3.2. Analisis Sistem Dinamik

Setiap persamaan di atas memiliki kondisi awal secara umum, yaitu  $S(0) = S_0, I(0) = I_0, A(0) = A_0$ , dengan setiap nilai awal bernilai positif. Dengan sistem dinamik dari persamaan (1) - (3) dapat ditemukan titik tetapnya atau titik setimbangnya dan ditentukan karakteristik stabilitasnya. Titik setimbangnya adalah titik invariant terhadap waktu sehingga  $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dA}{dt} = 0$ . Terdapat dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang endemik.

Jika diambil  $I = 0$ , maka akan diperoleh titik setimbang bebas penyakit dimana pada keadaan ini semua populasi yang terinfeksi virus HIV sudah tidak ada. Untuk mendapatkan titik setimbang maka persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai  $\beta(S + I) - \lambda SI - [\mu + b(P)]S - v_1S = 0$

Sehingga diperoleh

$$\mu + bP = \beta - v_1 \tag{4}$$

Selanjutnya dari persamaan (3) diperoleh :

$$\begin{aligned} v_1S + v_2I - [\mu + b(P)]A &= 0 \\ v_1S &= [\mu + b(P)]A \end{aligned} \tag{5}$$

Karena  $P = S + I + A$  dimana  $I = 0$  maka  $P = S + A$  atau  $A = P - S$ .

Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (5) diperoleh  $S = \left(\frac{\beta - v_1}{\beta}\right) \left(\frac{\beta - \mu - v_1}{b}\right)$ . Selanjutnya dari persamaan (5) diperoleh  $A = \left(\frac{v_1}{\beta}\right) \left(\frac{\beta - \mu - v_1}{b}\right)$ . Dengan demikian, titik tetap bebas penyakit adalah

$$E_0(S, I, A) = \left[ \frac{(\beta - v_1)(\beta - \mu - v_1)}{b\beta}, 0, \frac{v_1(\beta - \mu - v_1)}{b\beta} \right]$$

Untuk titik setimbang endemik dipengaruhi oleh populasi yang terinfeksi virus HIV dengan syarat bahwa  $S \neq 0, I \neq 0, \text{ dan } A \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \frac{dS}{dt} &= \beta(S + I) - \lambda SI - [\mu + b(P)]S - v_1 S \\
 \beta(S + I) - \lambda SI - [\mu + b(P)]S - v_1 S &= 0 \\
 I &= \frac{S(v_1 + [\mu + b(P)] - \beta)}{\beta - \lambda S} \\
 I &= \frac{\left(\frac{\mu + bP + v_2}{\lambda}\right)(v_1 + [\mu + bP] - \beta)}{(\beta - \lambda S)} \\
 I &= \frac{(\mu + bP + v_2)(v_1 + [\mu + bP] - \beta)}{\lambda[\beta - (\mu + bP + v_2)]} \\
 I &= \frac{(\mu + bP + v_2)(\beta - [\mu + bP] - v_1)}{\lambda(\mu + bP + v_2 - \beta)}
 \end{aligned}$$

Misalkan  $K = \frac{\bar{\mu} + v_2}{\bar{\mu} + v_2 - \beta}$  dimana  $\bar{\mu} = \mu + bP$  maka diperoleh

$$I = \frac{K}{\lambda}(\beta - v_1 - \bar{\mu}) \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \frac{dI}{dt} &= \lambda SI - [\mu + b(P)]I - v_2 I \\
 \lambda SI - [\mu + b(P)]I - v_2 I &= 0 \\
 \lambda S &= \mu + bP + v_2 \\
 S &= \frac{\bar{\mu} + v_2}{\lambda} \\
 S &= \frac{K}{\lambda}(\bar{\mu} + v_2 - \beta)
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \frac{dA}{dt} &= v_1 S + v_2 I - [\mu + b(P)]A \\
 v_1 S + v_2 I - \bar{\mu} A &= 0 \text{ atau } \bar{\mu} A = v_1 S + v_2 I \\
 \text{Dengan mensubstitusikan persamaan (6) dan (7) maka diperoleh}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu} A &= v_1 \cdot \frac{K}{\lambda}(\bar{\mu} + v_2 - \beta) + v_2 \cdot \frac{K}{\lambda}(\beta - v_1 - \bar{\mu}) \\
 &= \frac{K}{\lambda}[v_1(\bar{\mu} + v_2 - \beta) + v_2(\beta - v_1 - \bar{\mu})] \\
 &= \frac{K}{\lambda}[v_1 \bar{\mu} + v_1 v_2 - v_1 \beta + v_2 \beta - v_1 v_2 - v_2 \bar{\mu}] \\
 &= \frac{K}{\lambda}[v_1 \bar{\mu} - v_1 \beta + v_2 \beta - v_2 \bar{\mu}] \\
 &= \frac{K}{\lambda}[\bar{\mu}(v_1 - v_2) - \beta(v_1 - v_2)] \\
 A &= \frac{K}{\bar{\mu} \lambda}(\bar{\mu} - \beta)(v_1 - v_2)
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik  $E_1(S, I, A)$  adalah

$$K \left( \frac{\bar{\mu} + v_2 - \beta}{\lambda}, \frac{\beta - v_1 - \bar{\mu}}{\lambda}, \frac{(\bar{\mu} - \beta)(v_1 - v_2)}{\bar{\mu} \lambda} \right)$$

### 3.3. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Untuk analisa kestabilan titik kesetimbangan, dapat dibentuk matriks Jacobian dari persamaan (1) - (3) sebagai berikut:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dS} & \frac{df_1}{dI} & \frac{df_1}{dA} \\ \frac{df_2}{dS} & \frac{df_2}{dI} & \frac{df_2}{dA} \\ \frac{df_3}{dS} & \frac{df_3}{dI} & \frac{df_3}{dA} \end{bmatrix}$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} \beta - \lambda I - (\mu + bP) - v_1 & \beta - \lambda S & 0 \\ \lambda I & \lambda S - (\mu + bP) - v_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & -(\mu + bP) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dilakukan analisa kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit yang diperoleh, maka dengan mensubstitusikan nilai  $I = 0$ , dapat diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \beta - (\mu + bP) - v_1 & \beta - \lambda S & 0 \\ 0 & \lambda S - (\mu + bP) - v_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & -(\mu + bP) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya berdasarkan matriks Jacobian di atas dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan  $\det(J_0 - eI) = 0$  yaitu :

$$(\beta - (\mu + bP) - v_1 - e)(\lambda I - (\mu + bP) - v_2 - e)(-(\mu + bP) - e) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen yaitu:

$$e_1 = \beta - (\mu + bP) - v_1$$

$$e_2 = \lambda S - (\mu + bP) - v_2 = \lambda \left[ \left( \frac{\beta - v_1}{\beta} \right) \left( \frac{\beta - \mu - v_1}{b} \right) \right] - (\beta - v_1) - v_2$$

$$e_3 = -(\mu + bP) = -(\beta - v_1) = v_1 - \beta$$

Karena parameter yang bernilai positif maka  $e_3$  bernilai negatif. Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika

$$\lambda \left[ \left( \frac{\beta - v_1}{\beta} \right) \left( \frac{\beta - \mu - v_1}{b} \right) \right] - (\beta - v_1) - v_2 < 0$$

$$\lambda < \frac{\beta - v_1 + v_2}{\left( \frac{\beta - v_1}{\beta} \right) \left( \frac{\beta - \mu - v_1}{b} \right)}$$

dan

$$\beta - \mu - v_1 > 0$$

Untuk analisis titik kesetimbangan endemik, berdasarkan titik kesetimbangan endemik yang diperoleh maka dapat dibentuk matriks jacobian sebagai berikut ;

$$J_1 \begin{bmatrix} \beta - \lambda I - \bar{\mu} - v_1 & \beta - \lambda S & 0 \\ \lambda I & \lambda S - \bar{\mu} - v_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & -\bar{\mu} \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan  $\det(eI - J_1) = 0$  sebagai berikut

$$\det \begin{bmatrix} e - \beta + \lambda I + \bar{\mu} + v_1 & -\beta + \lambda S & 0 \\ -\lambda I & e - \lambda S + \bar{\mu} + v_2 & 0 \\ -v_1 & -v_2 & e + \bar{\mu} \end{bmatrix} = 0$$

$$(e + \bar{\mu})[(e - \beta + \lambda I + \bar{\mu} + v_1)(e - \lambda S + \bar{\mu} + v_2) + \lambda I(-\beta + \lambda S)] = 0$$

$$(e + \bar{\mu})[e^2 + e(v_1 + v_2 + \lambda I - \lambda S - \beta + 2\bar{\mu}) + (\beta\lambda S - \beta\bar{\mu} - \beta v_2 + \lambda I\bar{\mu} + \lambda I v_2 - \bar{\mu}\lambda S + \bar{\mu}^2 + \bar{\mu}v_2 - v_1\lambda S + v_1\bar{\mu} + v_1v_1 - \lambda I\beta)] = 0$$

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= v_1 + v_2 + \lambda I - \lambda S - \beta + 2\bar{\mu} \\ &= v_1 + v_2 + K(\beta - v_1 - \bar{\mu}) - K(\bar{\mu} + v_2 - \beta) - \beta + 2\bar{\mu} \\ &= v_1 - K(\bar{\mu} + v_1 - \beta) - \beta + \bar{\mu} \\ &= (\bar{\mu} + v_1 - \beta)(1 - K) \\ &= (\bar{\mu} + v_1 - \beta) \left( \frac{\bar{\mu} + v_2 - \beta - \bar{\mu} - v_2}{\bar{\mu} + v_2 - \beta} \right) \\ X &= \frac{\beta(\beta - v_1 - \bar{\mu})}{\bar{\mu} + v_2 - \beta} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} Y &= \beta\lambda S - \beta\bar{\mu} - \beta v_2 + \lambda I\bar{\mu} + \lambda I v_2 - \bar{\mu}\lambda S + \bar{\mu}^2 + \bar{\mu}v_2 - v_1\lambda S + v_1\bar{\mu} + v_1 - \lambda I\beta \\ &= \beta(\bar{\mu} + v_2) - \beta(\bar{\mu} + v_2) + K\bar{\mu}(\beta - v_1 - \bar{\mu}) + K v_2(\beta - v_1 - \bar{\mu}) - \bar{\mu}(\bar{\mu} + v_2) + \bar{\mu}(\bar{\mu} + v_2) - v_1(\bar{\mu} + v_2) + v_1(\bar{\mu} + v_2) - K\beta(\beta - v_1 - \bar{\mu}) \\ &= (\beta - v_1 - \bar{\mu})(K\bar{\mu} + K v_2 - K\beta) \\ &= (\beta - v_1 - \bar{\mu})(\bar{\mu} + v_2) \end{aligned}$$

Sehingga

$$(e + \bar{\mu})(e^2 + eX + Y) = 0$$

$$e^3 + e^2(X + \bar{\mu}) + e(Y + \bar{\mu}X) + \bar{\mu}Y = 0$$

$$e^3 + e^2 \left[ \frac{\beta(\beta - v_1 - \bar{\mu})}{\bar{\mu} + v_2 - \beta} + \bar{\mu} \right] + e \left[ (\beta - v_1 - \bar{\mu})(\bar{\mu} + v_2) + \frac{\bar{\mu}\beta(\beta - v_1 - \bar{\mu})}{\bar{\mu} + v_2 - \beta} \right] + \bar{\mu}(\beta - v_1 - \bar{\mu})(\bar{\mu} + v_2) = 0$$

$$e^2 + e^3 \left[ \frac{\beta(\beta - v_1) + \bar{\mu}(\bar{\mu} - v_2)}{\bar{\mu} + v_2 - \beta} \right] + e \left[ \frac{(\beta - v_1 - \bar{\mu})(\bar{\mu} + v_2)^2 - v_2\beta}{\bar{\mu} + v_2 - \beta} \right] + \bar{\mu}(\beta - v_1 - \bar{\mu})(\bar{\mu} + v_2) = 0$$

$$e^3 + m_1 e^2 + m_2 e + m_3 = 0$$

dimana

$$m_1 = \frac{\beta(\beta - v_1) + \bar{\mu}(\bar{\mu} - v_2)}{\bar{\mu} + v_2 - \beta}$$

$$m_2 = \frac{(\beta - v_1 - \bar{\mu})[(\bar{\mu} + v_2)^2 - v_2\beta]}{\bar{\mu} + v_2 - \beta}$$

$$m_3 = \bar{\mu}(\beta - v_1 - \bar{\mu})(\bar{\mu} + v_2)$$

Untuk menentukan nilai dari akar-akar karakteristik  $e_1, e_2, \text{ dan } e_3$  maka digunakan rumus Ruth-Hurwitz :

Tabel 1 Ruth-Hurwitz

$a_0 = 0$	$a_2 = m_2$
$a_1 = m_1$	$a_3 = m_3$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_4}{a_1}$	

Karena  $m_1 \cdot m_2 > m_3$  maka  $m_1 m_2 - m_3 > 0$ . Dengan demikian, karena semua elemen pada kolom pertama tabel 1 di atas memiliki tanda yang sama yaitu positif maka titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal.

### 3.4. Simulasi Numerik

Berikut ini akan disajikan simulasi secara numerik untuk menunjukkan dinamika tertentu dari Model SIA penyebaran penyakit HIV. Adapun nilai dari setiap parameter model seperti yang disajikan pada Tabel 2 berikut ini.

Tabel 2. Nilai Parameter Penyakit HIV

Parameter	Nilai Estimasi	
	Bebas Penyakit	Endemik
$\beta$	0.04029	0.04962
$\mu$	0.02026	0.02026
$v_1$	0.01	0.01
$v_2$	0.04	0.04
$\lambda$	0.0001	0.0004
$b$	0.00002	0.00002

Sumber:[11]

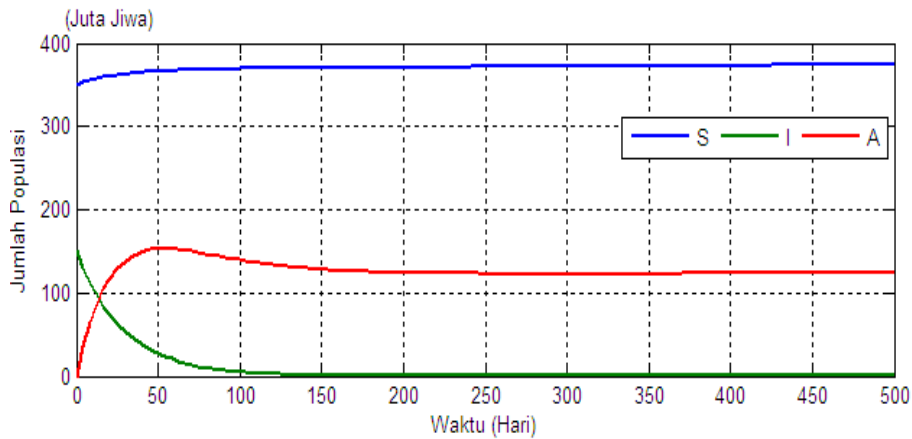
Proses simulasi dilakukan dengan waktu awal  $t_0 = 0$  dan waktu akhir  $t_f = 500$  hari. Sedangkan nilai awal dari masing-masing sub populasi seperti yang disajikan pada Tabel 3 berikut ini.

Tabel 3. Nilai Awal dari masing - masing Sub Populasi

Sub populasi pada saat $t = 0$	Nilai awal (juta jiwa)
$S$	350
$I$	150
$A$	0

Gambar 2 menunjukkan bahwa trayektori populasi *Susceptible* akan bertambah secara perlahan dan kontinu sejak awal. Sedangkan populasi *Infected* akan berkurang sejak  $t < 100$  hari dan setelah 100 hari jumlah populasi *Infected* sudah berada pada titik kesetimbangan nol. Hal ini terjadi seiring dengan bertambahnya jumlah populasi *Absatined* hingga mendekati titik kesetimbangan setelah 100 hari kemudian. Berdasarkan Tabel 2 diperoleh bahwa nilai parameter bebas penyakit juga sudah memenuhi syarat  $\lambda < \frac{\beta - v_1 + v_2}{\left(\frac{\beta - v_1}{\beta}\right)\left(\frac{\beta - \mu - v_1}{b}\right)}$  yakni  $0.0001 < 0.0623$ .





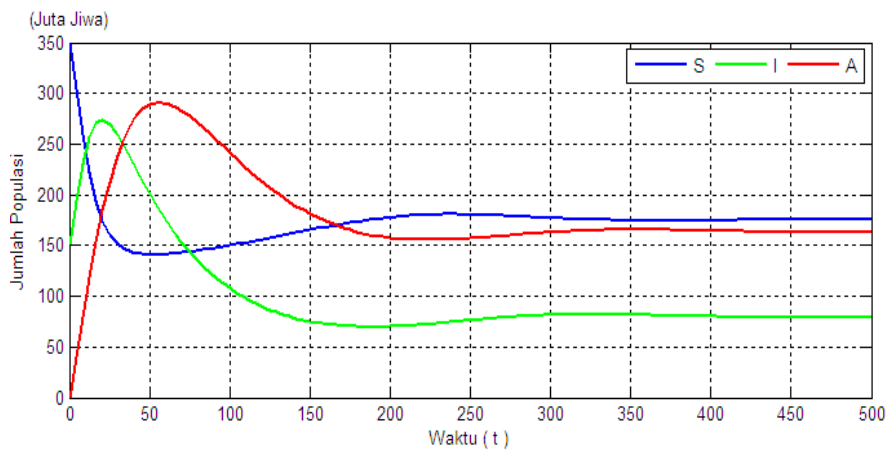
Gambar 2. Grafik Jumlah Populasi SIA Bebas Penyakit untuk  $0 < t < 500$

dimana titik kesetimbangan bebas penyakit adalah:

$$(S, I, A) = \left( \frac{(\beta - v_1)(\beta - \mu - v_1)}{b\beta}, 0, \frac{v_1(\beta - \mu - v_1)}{b\beta} \right)$$

$$= (377.027426, 0, 233.117387)$$

Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal.



Gambar 3. Grafik Jumlah Populasi SIA Endemik untuk  $0 < t < 500$

Gambar 3 menunjukkan bahwa populasi *Susceptible* menuju ke titik kesetimbangan  $S=175,65$  yang berarti mulai dari hari ke-250 maka terdapat 175.650.000 jiwa yang sehat. Populasi *Infected* mulai menuju titik kesetimbangan  $I = 79,655232$  yang berarti ada 79.655.232 jiwa mulai dari hari ke-250 terinfeksi HIV AIDS dan populasi *Absatined* menuju titik kesetimbangan  $A = 163,341351$  yang berarti terdapat 163.341.351 jiwa mulai dari hari ke-250 yang dikarantinakan. dan terjadi penyebaran penyakit. Hal ini sesuai dengan titik kesetimbangan endemik :

$$K \left( \frac{\bar{\mu} + v_2 - \beta}{\lambda}, \frac{\beta - v_1 - \bar{\mu}}{\lambda}, \frac{(\bar{\mu} - \beta)(v_1 - v_2)}{\bar{\mu}\lambda} \right)$$

$$= (175.65, 79.655232, 163.341351)$$

dimana titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa model penyebaran penyakit HIV/AIDS memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0(S, I, A) = \left[ \frac{(\beta - v_1)(\beta - \mu - v_1)}{b\beta}, 0, \frac{v_1(\beta - \mu - v_1)}{b\beta} \right]$ . Sedangkan titik kesetimbangan endemik adalah  $K \left( \frac{\bar{\mu} + v_2 - \beta}{\lambda}, \frac{\beta - v_1 - \bar{\mu}}{\lambda}, \frac{(\bar{\mu} - \beta)(v_1 - v_2)}{\bar{\mu}\lambda} \right)$  dimana titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal. Kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika  $\lambda < \frac{\beta - v_1 + v_2}{\left(\frac{\beta - v_1}{\beta}\right)\left(\frac{\beta - \mu - v_1}{b}\right)}$  dan  $\beta - \mu - v_1 > 0$ . Berdasarkan hasil simulasi diperoleh bahwa dampak dari sub populasi *Abstained* akan mempengaruhi, sehingga berkurangnya sub populasi yang terinfeksi.

#### References

- [1] Direktorat Jendral P2P Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. (2019). Laporan Perkembangan HIV AIDS dan Penyakit Infeksi Menular Seksual (PIMS) Triwulan I 2019.
- [2] H. W. Hethcote. (2008). The Basic Epidemiology Models: Models, Expression for  $R_0$ , Parameter Estimation and Application. In *Mathematical Understanding of Infectious Disease Dynamics*, Lecture Note Series Institute For Mathematical Sciences, National University Of Singapore, 1-61.
- [3] Komisi Penanggulangan AIDS Nasional. (2009). *Situasi HIV dan AIDS di Indonesia*, Jakarta.
- [4] D. Maxin, T. Olson, A. Shull. (2011). Vertical Transmission In Epidemic Models Of Sexually Trnsmitted Diseases With Isolation From Reproduction.
- [5] Prayudi. (2006). *Matematika Teknik*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- [6] Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI. (2014). *Situasi dan Analisis HIV AIDS*, Jakarta.
- [7] M. Rahmawati. (2019). *Penanggulangan HIV/AIDS di Indonesia Dalam Ancaman RKUHP*. Institute for Criminal Justice Reform (ICJR), Jakarta.
- [8] UNAIDS, *UNAIDS Data 2018*, [https://www.unaids.org/sites/default/files/media\\_asset/unaid-data-2018\\_en.pdf](https://www.unaids.org/sites/default/files/media_asset/unaid-data-2018_en.pdf), diakses pada 6 Januari 2020.
- [9] W. Wahab, A. Subiantoro. . *Fundamental of Control System Stability Criterion-Routh Hurwitz*. Lecture Note.
- [10] World Health Organization (WHO), *Number of people (all ages) living with HIV Estimates by WHO region*, <http://apps.who.int/gho/data/view.main.22100WHO?lang=en>, diakses pada 6 Januari 2020.