TENSOR Pure and Applied Mathematics Journal

April 2020 | Volume 1 | Nomor 1 Halaman 15–24

Algoritma Multi-Kelas *Twin Bounded* SVM Untuk Klasifikasi Pola

Berny Pebo Tomasouw[1*], Zeth Arthur Leleury[2]

[1] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Ambon, Indonesia.
Email: bptomasouw@gmail.com
[2] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Ambon, Indonesia
Email: zetharthur82@gmail.com

Manuscript submitted : February 2020
Accepted for publication : April 2020

Abstract: Pattern recognition is a process of recognizing patterns by using machine learning algorithm. Pattern recognition can be defined as a classification of data based on knowledge that already gained or information extracted from patterns. One method that can be used in pattern classification problem is SVM. In this study we introduced Twin Bounded SVM which is refinement of Twin SVM. The discussion begins with the linear Twin Bounded SVM method to solve a two-class classification problem and followed by an algorithm to solve multi-class classification problem.

2010 Mathematical Subject Classification : 68T10, 92B20
Key words: algorithm, SVM, twin bounded, multi-class.

1. Pendahuluan

Pengenalan pola (*pattern recognition*) adalah cara mengenali objek berdasarkan ciri-ciri yang dimiliki oleh objek tersebut. Salah satu tujuan dari pengenalan pola adalah untuk mengklasifikasikan sebuah objek ke dalam kelas atau kategori tertentu (dikenal dengan istilah klasifikasi pola atau *pattern classification*). Berbagai metode dikenal dalam klasifikasi pola, seperti analisis diskriminasi linier (linear discrimination analysis), model hidden markov hingga metode kecerdasan buatan seperti jaringan syaraf tiruan (JST). Salah satu metode yang akhir-akhir ini banyak mendapat perhatian dalam klasifikasi pola adalah *Support Vector Machine* atau yang dikenal dengan istilah SVM.

SVM telah berhasil diaplikasikan dalam problema dunia nyata (real-world problems), dan memberikan solusi yang lebih baik untuk kasus tertentu dibandingkan metode konvensional seperti misalnya jaringan syaraf tiruan. Dalam penelitiannya Bhasin dan Raghava [3] menggunakan metode matriks kuantitatif (Quantitative Matrix), JST dan SVM untuk memprediksi sel CTL (cytotoxic T lymphocytes) dalam barisan protein. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa SVM lebih unggul dibandingkan dua metode yang lain. Wong dan Hsu [7] memperlihatkan keunggulan SVM dibanding JST dalam masalah klasifikasi image, sedangkan Hmeidi, dkk [5] juga keunggulan SVM dibanding metode KNN (K-Nearest Neighbor) dalam masalah kategorisasi teks (Text Categorization).

Karena konsep awal SVM hanya untuk mengatasi masalah klasifikasi dua kelas maka SVM tidak dapat diterapkan untuk masalah multi-kelas sehingga dikembangkan metode-metode pengambilan keputusan untuk mengatasi masalah ini. Metode-metode tersebut antara lain metode one-against-all, metode one-against-one (pairwise), metode decision directed acyclic graph, dan sebagainya. Perkembangan SVM pun dinilai sangat cepat, hal ini ditandai dengan banyaknya variasi-variasi SVM yang telah berhasil dikembangkan oleh para peneliti. Shigeo Abe [1] mencatat sedikitnya terdapat lima jenis SVM antara lain Least-Squares Support Vector Machines (LSVM), Linear Programming Support Vector Machines (LPSVM), Sparse Support Vector Machines (SSVM), Robust Support Vector Machines (RSVM), dan Bayesian Support Vector Machines (BSVM). Masih banyak lagi variasi SVM yang telah dikembangkan, namun jelas bahwa masing-masing variasi SVM tersebut memiliki kelemahan dan keunggulan tersendiri.

Jayadeva dkk [4] dalam penelitiannya berhasil mengembangkan variasi SVM yang baru dan diberi nama Twin Support Vector Machines (Twin SVM). Berbeda dengan konsep dasar SVM yang berusaha menemukan sebuah pemisah terbaik untuk memisahkan dua klas, Twin SVM mencoba menemukan dua pemisah terbaik untuk memisahkan dua klas tersebut. Jayadeva memperlihatkan bahwa dari segi waktu perhitungan dan keakurasian klasifikasi, TSVM lebih unggul dibandingkan SVM terdahulu. Shao, dkk [6] menyempurnakan hasil penelitian Jayadeva dan menghasilkan variasi Twin SVM yang lain yaitu Twin Bounded Support Vector Machines (TB-SVM).

Dalam penelitian ini akan diturunkan bentuk dual dari masalah pemrograman kuadratik untuk mendapatkan pemisah yang optimal dari Twin Bounded SVM dan menyusun algoritma untuk klasifikasi pola.

1.1. *Support Vector Machine* (SVM)

Misalkan terdapat m data pelatihan yakni $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_m,y_m)\}$ dimana $x_i \in \mathbb{R}^n$ adalah sampel data dan $y_i \in \{1,-1\}$ adalah target atau kelas dari sampel data. Dengan menggunakan konsep fungsi kernel pemisah optimal dapat ditentukan dengan terlebih dahulu menyelesaikan bentuk dual dari masalah pemrograman kuadratik berikut

$$\text{Max} \quad \psi(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(x_i, x_j) \tag{1}$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0 \quad \text{dan} \quad \alpha_i \ge 0 \quad \text{dimana} \quad i = 1,2,\dots,m.$$

Parameter bias dapat dihitung dengan persamaan

$$b = \frac{1}{N_{SV}} \sum_{i=1}^{N_{SV}} \left(y_i - \sum_{i=1}^{N_{SV}} \alpha_i y_i K(x_i, x_j) \right) \tag{2}$$

sedangkan pemisah optimal dihitung dengan rumus

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_{SV}} \alpha_i y_i K(x_i, x) + b \tag{3}$$

Data input $x \in \mathbb{R}^n$ yang baru tetap diklasifikasikan berdasarkan syarat berikut

$$\begin{cases} \text{klas} \ \ +1 \ , & \text{jika} \ \ f(x) > 0 \\ \text{klas} \ \ -1 \ , & \text{jika} \ \ f(x) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

1.2. Multi-kelas SVM

Pada dasarnya, SVM hanya dapat dipakai dalam menyelesaikan masalah klasifikasi dua kelas. Namun kenyataanya bahwa seringkali yang dihadapi adalah masalah klasifikasi multi-kelas. Kreßel (1999) memperkenalkan metode Pairwise untuk diterapkan pada SVM sehingga dapat menyelesaikan masalah klasifikasi multi-kelas.

1.2.1. SVM berbasis *Pairwise*

Misalkan terdapat N jumlah klas dari sampel data yang akan diklasifikasi. Metode Pairwise bekerja dengan cara membentuk semua kombinasi pasangan dua klas yakni sebanyak N(N-1)/2 dimana $N > 2$. Oleh karena itu, metode ini juga seringkali disebut sebagai metode satu lawan satu (*one against one*). Misalkan pemisah optimal yang diperoleh dari kelas i dan kelas j adalah

$$f_{ij}(x) = w_{ij}^T \phi(x) + b_{ij} \tag{5}$$

dimana $i = 1, 2, \ldots, N-1$ dan $j = i+1,\ i+2,\ \ldots,\ N$ serta berlaku $f_{ji}(x) = -f_{ij}(x)$. Data input $x \in \mathbb{R}^n$ yang baru akan diklasifikasikan berdasarkan hasil voting yang dihitung dengan rumus

$$f_i(x) = \sum_{j \neq i,\ j=1}^{N} \operatorname{sgn}\left(f_{ij}(x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{6}$$

dengan

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & , \text{ jika } u \geq 0 \\ -1 & , \text{ jika } u < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Kelas ke-i yang memiliki nilai f_i maksimum yang akan menjadi pemenang dan data input x akan ditetapkan sebagai anggota kelas ke-i,

$$\arg \max_{i=1,2,\ldots,N} f_i(x) \tag{8}$$

Algoritma 1. Algoritma multi-kelas SVM

1). Dapatkan pemisah optimal yakni (5) untuk semua kombinasi pasangan dua kelas.

2). Untuk data input x yang baru hitung nilai $f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, N$ berdasarkan (6)-(7).

3). Data input x diklasifikasikan menggunakan (8).

1.3. *Twin* SVM

Twin SVM merupakan merupakan klasifikasi biner yang menggunakan dua pemisah non-pararel untuk memisahkan dua kelas (Jayadeva dkk, 2007). Dua pemisah tersebut diperoleh dengan cara menyelesaikan dua masalah kuadratik programming yang lebih kecil dibandingkan dengan masalah kuadratik programming pada SVM standar.

Misalkan terdapat m data training $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)\}$ dimana $x_i \in \mathbb{R}^n$ adalah sampel data dan $y_i \in \{1, -1\}$ adalah target atau kelas dari sampel data. Twin SVM bertujuan untuk mencari dua fungsi pemisah yang optimal, yakni

$$f_1(x) = x w_1 + b_1 = 0 \quad \text{dan} \quad f_2(x) = x w_2 + b_2 = 0 \tag{9}$$

Dengan $w_1, w_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ adalah parameter bobot dan $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ adalah parameter bias. Selanjutnya, misalkan matriks $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ mewakili sampel data dari kelas +1 dan matriks $B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ mewakili sampel data dari kelas -1. Sedangkan $e_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times 1}$ dan $e_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times 1}$ adalah vektor kolom yang semua elemennya bernilai satu.

Untuk mendapatkan dua pemisah tersebut maka harus dicari solusi dari dua masalah pemrograman kudratik berikut

$$\operatorname*{Min}_{w_1, b_1, y} \ \frac{1}{2}(A w_1 + e_1 b_1)^T (A w_1 + e_1 b_1) + c_1 e_2^T \mu_1$$

dengan kendala $-(B w_1 + e_2 b_1) + \mu_1 \geq e_2 \ , \ \mu_1 \geq 0$ (10)

dan

$$\underset{w_2, b_2, y}{\text{Min}} \quad \frac{1}{2}\left(B w_2 + e_2 b_2\right)^T \left(B w_2 + e_2 b_2\right) + c_2 e_1^T \mu_2$$

dengan kendala $\left(A w_2 + e_1 b_2\right) + \mu_2 \geq e_1$, $\mu_2 \geq 0$ (11)

dimana C_1 dan C_2 adalah parameter positif serta μ_1 dan μ_2 adalah variabel slack.

Pada fungsi objaktif (10) di atas, tujuan meminimumkan $\left(A w_1 + e_1 b_1\right)^T \left(A w_1 + e_1 b_1\right)$ adalah untuk menjaga agar pemisah menjadi dekat dengan sampel data dari kelas +1. Sedangkan bagian kendalanya mensyaratkan bahwa jarak yang paling kecil dari pemisah ke sampel data kelas -1 adalah satu. Begitupun sebaliknya, pada fungsi objaktif (11) di atas, tujuan meminimumkan $\left(B w_2 + e_2 b_2\right)^T \left(B w_2 + e_2 b_2\right)$ adalah untuk menjaga agar pemisah menjadi dekat dengan sampel data dari kelas -1. Sedangkan bagian kendalanya mensyaratkan bahwa jarak yang paling kecil dari pemisah ke sampel data kelas +1 adalah satu.

Selanjutnya, Jayadeva dkk (2007) menurunkan bentuk dual dari masalah pemrograman kuadratik (10) dan (11) di atas sebagai berikut

$$\underset{\alpha}{\text{Max}} \quad e_2^T \alpha - \frac{1}{2} \alpha^T G \left(H^T H\right)^{-1} G^T \alpha$$

dengan kendala $0 \leq \alpha \leq C_1$ (12)

dan

$$\underset{\beta}{\text{Max}} \quad e_1^T \beta - \frac{1}{2} \beta^T P \left(Q^T Q\right)^{-1} P^T \beta$$

dengan kendala $0 \leq \beta \leq C_2$ (13)

dimana $G = [B \;\; e_2]$, $H = \left[A \;\; e_1\right]$, $P = [A \;\; e_1]$, dan $Q = \left[B \;\; e_1\right]$.

Pada persamaan (12) dan (13), $\alpha \in \mathbb{R}^{m_2}$ dan $\beta \in \mathbb{R}^{m_1}$ merupakan faktor pengali Lagrange. Dua pemisah non-pararel pada Persamaan (9) diperoleh dari

$$v_1 = -\left(H^T H\right)^{-1} G^T \alpha \quad \text{dan} \quad v_2 = \left(Q^T Q\right)^{-1} P^T \beta \tag{14}$$

dengan $v_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ dan $v_2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Pada kondisi tertentu matriks $H^T H$ dan $H^T H$ bisa saja bukan merupakan matriks semidefinit positif. Hal ini akan menyebabkan solusi yang diperoleh dari masalah pemrograman kudratik (12)-(13) buruk. Untuk mengatasinya digunakan syarat εI, dimana $\varepsilon > 0$ yang ditambahkan pada Persamaan (14) sehingga menjadi

$$v_1 = -\left(H^T H + \varepsilon I\right)^{-1} G^T \alpha \quad \text{dan} \quad v_2 = \left(Q^T Q + \varepsilon I\right)^{-1} P^T \beta \tag{15}$$

Sampel data $x \in \mathbb{R}^n$ yang baru diklasifikasikan ke dalam klas r $\left(r = 1, 2\right)$ berdasarkan jarak yang minimum untuk kedua pemisah tersebut, yakni

$$x w_r + b_r = \underset{j=1,2}{\text{Min}} \left| x w_j + b_j \right| \tag{16}$$

2. Hasil dan Pembahasan

2.1. *Twin Bounded* SVM

Shao, dkk [6] mengembangkan Twin Bounded SVM untuk menutupi kekurangan dari Twin SVM. Pada bagian sebelumnya telah diperlihatkan bentuk primal pemrograman kuadratik Twin SVM yakni

$$\underset{w_1, b_1, \mu_1}{\text{Min}} \quad \frac{1}{2}(Aw_1 + e_1 b_1)^T (Aw_1 + e_1 b_1) + c_1 e_2^T \mu_1$$

dengan kendala $-(Bw_1 + e_2 b_1) + \mu_1 \geq e_2$, $\mu_1 \geq 0$ (17)

dan

$$\underset{w_2, b_2, \mu_2}{\text{Min}} \quad \frac{1}{2}(Bw_2 + e_2 b_2)^T (Bw_2 + e_2 b_2) + c_2 e_1^T \mu_2$$

dengan kendala $(Aw_2 + e_1 b_2) + \mu_2 \geq e_1$, $\mu_2 \geq 0$ (18)

dimana C_1 dan C_2 adalah parameter positif serta μ_1 dan μ_2 adalah variabel slack. Matriks $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ mewakili sampel data dari kelas +1 dan matriks $B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ mewakili sampel data dari kelas -1. Sedangkan $e_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times 1}$ dan $e_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times 1}$ adalah vektor kolom yang semua elemennya bernilai satu. *Twin Bounded* SVM linier bertujuan untuk mencari dua fungsi pemisah (pemisah) yang optimal, yakni

$$f_1(x) = xw_1 + b_1 = 0 \quad \text{dan} \quad f_2(x) = xw_2 + b_2 = 0 \qquad (19)$$

dimana $w_1, w_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ adalah parameter bobot dan $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ adalah parameter bias. Untuk mendapatkan bentuk primal pemrograman kuadratik Twin Bounded SVM, pertama-tama akan ditinjau masalah pemrograman kuadratik (17) dan (18) di atas. Berdasarkan konsep dasar SVM yang memaksimalkan jarak antara dua pemisah maka akan dimaksimalkan jarak antara pemisah optimal $xw_1 + b_1 = 0$ dan pemisah pendukung $xw_1 + b_1 = -1$. Jika didefinisikan $\mathbf{y} = [x \;\; 1]$ dan $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ maka pemisah optimal dan pemisah pendukung berubah menjadi

$$\mathbf{y}\,\mathbf{v}_1 = [x \;\; 1]\begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dan} \quad \mathbf{y}\,\mathbf{v}_1 = [x \;\; 1]\begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = -1.$$

Begitupun juga untuk jarak antara pemisah optimal $xw_2 + b_2 = 0$ dan pemisah pendukung $xw_2 + b_2 = 1$. Jika didefinisikan $\mathbf{y} = [x \;\; 1]$ dan $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ maka pemisah optimal dan pemisah pendukung berubah menjadi

$$\mathbf{y}\,\mathbf{v}_2 = [x \;\; 1]\begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dan} \quad \mathbf{y}\,\mathbf{v}_2 = [x \;\; 1]\begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = 1.$$

Selanjutnya jarak yang harus dimaksimalkan adalah $\dfrac{1}{\sqrt{\|w_1\|^2 + b_1^2}}$ dan $\dfrac{1}{\sqrt{\|w_2\|^2 + b_2^2}}$. Masalah memaksimalkan $\dfrac{1}{\sqrt{\|w_1\|^2 + b_1^2}}$ dan $\dfrac{1}{\sqrt{\|w_2\|^2 + b_2^2}}$ ekuivalen dengan masalah meminimumkan $\left(\|w_1\|^2 + b_1^2\right)$ dan $\left(\|w_2\|^2 + b_2^2\right)$. Jika kondisi ini ditambahkan pada fungsi objektif (17) dan parameter positif c_3 serta fungsi objektif (18) dan parameter positif c_4 maka bentuk primal pemrograman kudratik TB-SVM adalah

$$\underset{w_1, b_1, \mu_1}{\text{Min}} \quad \frac{1}{2}c_3\left(\|w_1\|^2 + b_1^2\right) + \frac{1}{2}(Aw_1 + e_1 b_1)^T (Aw_1 + e_1 b_1) + c_1 e_2^T \mu_1$$

dengan kendala $-(Bw_1 + e_2 b_1) + \mu_1 \geq e_2$, $\mu_1 \geq 0$ (20)

dan

$$\underset{w_2, b_2, \mu_2}{\text{Min}} \quad \frac{1}{2}c_4\left(\|w_2\|^2 + b_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(Bw_2 + e_2b_2\right)^T\left(Bw_2 + e_2b_2\right) + c_2e_1^T\mu_2$$

dengan kendala $\left(Aw_2 + e_1b_2\right) + \mu_2 \geq e_1, \quad \mu_2 \geq 0$ (21)

Dengan menyelesaikan masalah pemrograman kuadratik (20) dan (21) maka akan diperoleh parameter w_1, w_2, b_1, dan b_2. Untuk menyelesaikannya maka kedua masalah pemrograman kuadratik tersebut akan diubah ke dalam bentuk dualnya.

Misalkan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m_2 \times 1}$ adalah pengali Lagrange maka masalah pemrograman kuadratik (20) akan berubah menjadi

$$\begin{aligned} L\left(w_1, b_1, \mu_1, \alpha, \beta\right) &= \frac{1}{2}c_3\left(\|w_1\|^2 + b_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(Aw_1 + e_1b_1\right)^T\left(Aw_1 + e_1b_1\right) \\ &\quad + c_1e_2^T\mu_1 - \alpha^T\left(-\left(Bw_1 + e_2b_1\right) + \mu_1 - e_2\right) - \beta^T\mu_1 \end{aligned} \quad (22)$$

Berdasarkan syarat Karush-Kuhn-Tucker (KKT) maka

i. $\dfrac{\partial L}{\partial w_1} = 0 \Rightarrow c_3w_1 + A^T\left(Aw_1 + e_1b_1\right) + B^T\alpha = 0$ (23)

ii. $\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 0 \Rightarrow c_3b_1 + e_1^T\left(Aw_1 + e_1b_1\right) + e_2^T\alpha = 0$ (24)

iii. $\dfrac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \Rightarrow c_1e_2^T - \alpha^T - \beta^T = 0$

$$c_1e_2 = \alpha + \beta \quad (25)$$

iv. $-\left(Bw_1 + e_2b_1\right) + \mu_1 \geq e_2 \;, \quad \mu_1 \geq 0$ (26)

v. $\alpha^T\left(-\left(Bw_1 + e_2b_1\right) + \mu_1 - e_2\right) = 0 \;, \quad \beta^T\mu_1 = 0$ (27)

vi. $\alpha \geq 0 \,,\, \beta \geq 0$ (28)

Karena $\beta \geq 0$ dan berdasarkan (25) maka

$$0 \leq \alpha \leq c_1 \quad (29)$$

Berdasarkan (23) dan (24) maka diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} A^T \\ e_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & e_1 \end{bmatrix} + c_3I\right)\begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ e_2^T \end{bmatrix}\alpha = 0$$

Misalkan

$$H = \begin{bmatrix} A & e_1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} B & e_2 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad u = \begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

maka

$$u = -\left(H^TH + c_3I\right)^{-1}G^T\alpha \quad (31)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (30) dan (31) ke Persamaan (20) maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
L(\alpha) &= \frac{1}{2}c_3\left(w_1^T w_1 + b_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(A w_1 + e_1 b_1\right)^T \left(A w_1 + e_1 b_1\right) + c_1 e_2^T \mu_1 \\
&\quad - \alpha^T\left(-\left(B w_1 + e_2 b_1\right) + \mu_1 - e_2\right) - \beta^T \mu_1 \\
&= \frac{1}{2}c_3\left(\begin{bmatrix} w_1^T & b_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} A & e_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right)^T \left(\begin{bmatrix} A & e_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) + c_1 e_2^T \mu_1 \\
&\quad + \alpha^T\left(B w_1 + e_2 b_1\right) - \alpha^T \mu_1 + e_2^T \alpha - \beta^T \mu \\
&= \frac{1}{2}c_3 u^T u + \frac{1}{2}\left(u^T H^T H u\right) + c_1 e_2^T \mu_1 + \alpha^T G u + e_2^T \alpha - c_1 e_2^T \mu_1 \\
&= \frac{1}{2}\alpha^T G\left(H^T H + c_3 I\right)^{-1} G^T \alpha - \alpha^T G\left(H^T H + c_3 I\right)^{-1} G^T \alpha + e_2^T \alpha \\
&= e_2^T \alpha - \frac{1}{2}\alpha^T G\left(H^T H + c_3 I\right)^{-1} G^T \alpha
\end{aligned}
$$

Secara lengkap, bentuk dual dari pemrograman kuadratik (20) menjadi

$$
\underset{\alpha}{\text{Max}} \quad e_2^T \alpha - \frac{1}{2}\alpha^T G\left(H^T H + c_3 I\right)^{-1} G^T \alpha \tag{32}
$$

dengan kendala $0 \le \alpha \le c_1$

Selanjutnya, misalkan $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{m_1 \times 1}$ adalah pengali Lagrange maka masalah pemrograman kuadratik (21) akan berubah menjadi

$$
\begin{aligned}
L\left(w_2, b_2, \mu_2, \gamma, \beta\right) &= \frac{1}{2}c_4\left(\|w_2\|^2 + b_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(B w_2 + e_2 b_2\right)^T \left(B w_2 + e_2 b_2\right) \\
&\quad + c_2 e_1^T \mu_2 - \gamma^T\left(\left(A w_2 + e_1 b_2\right) + \mu_2 - e_2\right) - \beta^T \mu_2
\end{aligned} \tag{33}
$$

Berdasarkan syarat Karush-Kuhn-Tucker (KKT) maka

i. $\dfrac{\partial L}{\partial w_2} = 0 \Rightarrow c_4 w_2 + B^T\left(B w_2 + e_2 b_2\right) - A^T \gamma = 0$ (34)

ii. $\dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 0 \Rightarrow c_4 b_2 + e_2^T\left(B w_2 + e_2 b_2\right) - e_1^T \gamma = 0$ (35)

iii. $\dfrac{\partial L}{\partial \mu_2} = 0 \Rightarrow c_2 e_1^T - \gamma^T - \beta^T = 0$

$$
c_2 e_1 = \gamma + \beta \tag{36}
$$

iv. $\left(A w_2 + e_1 b_2\right) + \mu_2 \ge e_1 \;,\; \mu_2 \ge 0 \,.$

v. $\gamma^T\left(\left(A w_2 + e_1 b_2\right) + \mu_2 - e_1\right) = 0, \quad \beta^T \mu_2 = 0$ (37)

vi. $\gamma \ge 0 \,,\, \beta \ge 0$ (38)

Karena $\beta \ge 0$ dan berdasarkan (36) maka

$$
0 \le \gamma \le c_2 \tag{39}
$$

Berdasarkan (4.18) dan (4.19) maka diperoleh

$$
\left(\begin{bmatrix} B^T \\ e_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & e_2 \end{bmatrix} + c_4 I\right)\begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T \\ e_1^T \end{bmatrix}\gamma = 0
$$

Misalkan

$$
H = \begin{bmatrix} A & e_1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} B & e_2 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad v = \begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{40}
$$

maka

$$
v = \left(G^T G + c_4 I\right)^{-1} H^T \gamma \tag{41}
$$

Dengan mensubstitusikan (4.24) dan (4.25) ke (4.17) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \frac{1}{2}c_4\left(w_2^T w_2 + b_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(B w_2 + e_2 b_2\right)^T\left(B w_2 + e_2 b_2\right) + c_2 e_1^T \mu_2 \\
&\quad - \gamma^T\left(\left(A w_2 + e_1 b_2\right) + \mu_2 - e_1\right) - \beta^T \mu_2 \\
&= \frac{1}{2}c_4\left(\begin{bmatrix} w_2^T & b_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} B & e_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)^T\left(\begin{bmatrix} B & e_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) + c_2 e_1^T \mu_2 \\
&\quad - \gamma^T\left(\begin{bmatrix} A & e_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) + e_1^T\gamma - \left(\gamma^T + \beta^T\right)\mu_2 \\
&= \frac{1}{2}c_4 v^T v + \frac{1}{2}\left(v^T G^T G v\right) + c_2 e_1^T \mu_2 - \gamma^T H v + e_1^T \gamma - c_2 e_1^T \mu_2 \\
&= \frac{1}{2}\gamma^T H\left(G^T G + c_4 I\right)^{-1} H^T \gamma - \gamma^T H\left(G^T G + c_4 I\right)^{-1} H^T \gamma + e_1^T \gamma \\
&= e_1^T \gamma - \frac{1}{2}\gamma^T H\left(G^T G + c_4 I\right)^{-1} H^T \gamma
\end{aligned}$$

Secara lengkap, bentuk dual dari pemrograman kuadratik (21) menjadi

$$\max_{\gamma} \; e_1^T \gamma - \frac{1}{2}\gamma^T H\left(G^T G + c_4 I\right)^{-1} H^T \gamma \tag{42}$$

dengan kendala $0 \le \gamma \le c_2$

Solusi dari masalah pemrograman kuadratik (32) dan (42), yakni α dan γ akan digunakan untuk menghitung parameter w_1, w_2, b_1, dan b_2 dengan Persamaan (31) dan (41). Sampel data $x \in \mathbb{R}^n$ yang baru diklasifikasikan ke dalam kelas r $(r = 1,2)$ berdasarkan jarak yang minimum untuk kedua pemisah tersebut, yakni

$$\text{kelas} \quad r = \arg\min_{j=1,2}\left|x w_j + b_j\right| \tag{43}$$

Secara lengkap, algoritma *Twin Bounded* SVM adalah sebagai berikut :

Algoritma 2. Algoritma *Twin Bounded* SVM

1). Bentuk matriks $H = \begin{bmatrix} A & e_1 \end{bmatrix}$ dan $G = \begin{bmatrix} B & e_2 \end{bmatrix}$.

2). Tentukan nilai parameter $c_1, c_2, c_3,$ dan c_4.

3). Dapatkan solusi dari pemrograman kuadratik (32) dan (42) yang berupa nilai α dan γ.

4). Dapatkan parameter w_1, w_2, b_1, dan b_2 dengan menggunakan (31) dan (41).

5). Gunakan (43) untuk penentuan keanggotaan kelas.

2.2. Algoritma Multi-Kelas *Twin Bounded* SVM

Karena cara kerja SVM dan *Twin Bounded* SVM agak berbeda dalam hal jumlah pemisah yang optimal, maka Algoritma 1 perlu dikembangkan untuk menangani masalah multi-kelas Twin Bounded SVM. Misalkan pemisah optimal yang diperoleh dari pasangan kelas *i* dan kelas *j* adalah

$$f_i(x) = x w_1 + b_1 \quad \text{dan} \quad f_j(x) = x w_2 + b_2 \tag{44}$$

maka algoritma multi-kelas Twin Bounded SVM linier adalah sebagai berikut:

Algoritma 3. Algoritma Multi-Kelas *Twin Bounded* SVM

1). Dapatkan pemisah optimal yakni Persamaan (44) untuk semua kombinasi pasangan dua kelas menggunakan Algoritma 2.

2). Tetapkan $h(i)=0$ dengan $i=1,2,\ldots,n$.

3). Untuk data input x yang baru, hitung nilai $g_i(x)=|xw_1+b_1|$ dan $g_j(x)=|xw_2+b_2|$. Jika $g_i(x)<g_j(x)$ maka $h(i)=h(i)+1$. Sebaliknya jika $g_j(x)<g_i(x)$ maka $h(j)=h(j)+1$.

4). Data input *x* diklasifikasikan ke dalam kelas ke-*i* menggunakan rumus $\arg\max_{i=1,2,\ldots,N} h(i)$

3. Kesimpulan

Dalam penelitian ini telah disusun algoritma Twin Bounded SVM untuk menghasilkan pemisah optimal dan dapat digunakan untuk masalah klasifikasi dua kelas. Selanjutnya, berdasarkan algoritma multi-kelas SVM telah disusun juga algoritma multi-kelas Twin Bounded SVM untuk menangani masalah klasifikasi multi-kelas.

References

[1] S. Abe (2010). Support Vector Machines for Pattern Classification (Second Edition). London: Springer-Verlag.

[2] V. N. Vapnik, (1999). The Nature of Statistical Learning Theory (Second Edition). New York : Springer-Verlag.

[3] M. Bhasin, G. P. S. Raghava. (2004). Prediction of CTL epitopes using QM, SVM and ANN techniques. *Vaccine Journal,* 22, 3195–3204.

[4] Jayadeva, R. Khemchandani, S. Chandra. (2007). Twin Support Vector Machines for Pattern Classification. *Pattern Analysis And Machine Intelligence,* 29 (5) , 905-910.

[5] I. Hmeidi, B. Hawashin, E. El-Qawasme. (2008). Performance of KNN and SVM classifiers on full word Arabic articles. *Advanced Engineering Informatics, 22* , 106–111.

[6] Y. Shao, C. Zhang, X. Wang, N. Deng. (2011). Improvements on Twin Support Vector Machines. *Transactions On Neural Networks,* 22 (6) , 962-968.

[7] W. T. Wong, S. H. Hsu. (2006). Application of SVM and ANN for image retrieval. *European Journal of Operational Research,* 173, 938–950.

[8] X. Zhang, et al. (2012). Multi-class support vector machine optimized by inter-cluster distance and self-adaptive deferential evolution. *Applied Mathematics and Computation,* 218, 4973–4987.