TENSOR Pure and Applied Mathematics Journal

April 2020 | Volume 1 | Nomor 1 Halaman 7–14

Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Orde Dua Dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat Pada Rangkaian Listrik Seri LC

Monalisa E. Rijoly[1*], Francis Yunito Rumlawang[2]

[1] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Jl. Ir. M. Putuhena, Ambon. Indonesia.
Email: monalisa.rijoly@fmipa.unpatti.ac.id
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Jl. Ir. M. Putuhena, Ambon. Indonesia.
Email: rumlawang@fmipa.unpatti.ac.id

Manuscript submitted : February 2020
Accepted for publication : April 2020

Abstract: One alternative to solve second order differential equations by numerical methods, specifically non-liner differential equations is the Runge-Kutta fourth order method. The Runge-Kutta fourth order method is a numerical method that has high degree of precision and accuracy when compared to other numerical methods. In this paper we will discuss the numerical solution of second order differential equations on LC series circuit problem using the Runge-Kutta fourth order method. The numerical solution generated by the computational calculation using the MATLAB program, the strong current and charge are obtaind from $t=0$ and $t=0{,}5$ second and different step size values.

2010 Mathematical Subject Classification : 74S99, 65L06
Key words: Diferensial Equation, LC series circuit, Numerical Metheds, Runge-Kutta fourth order method.

1. Pendahuluan

Persamaan Diferensial adalah salah satu cabang ilmu Matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Secara umum, masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial [3].

Selain itu dapat juga diartikan sebagai persamaan yang menghubungkan suatu besaran dengan perubahannya. Persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai persamaan yang mengandung suatu besaran dan turunannya (diferensialnya) yang dapat dituliskan sebagai berikut [4]:

$$F\left(x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2},\dots,\frac{d^nx}{dt^n},t\right)=0 \tag{1}$$

Persamaan diferensial memiliki banyak jenis, diantaranya persamaan diferensial yang sangat sederhana yang secara umum paling mudah untuk ditentukan penyelesaiannya hingga yang sangat kompleks yang terkadang sangat sulit untuk ditentukan penyelesaiannya. Salah satu persamaan diferensial yang banyak digunakan dalam penerapannya adalah Persamaan Diferensial Linier, yang secara umum dapat dituliskan sebagai berikut [1] :

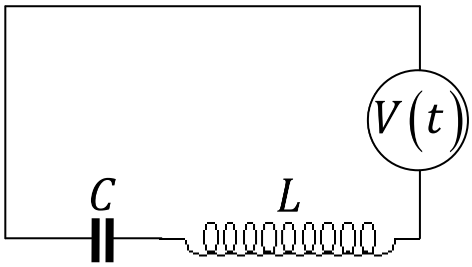
$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t) \tag{2}$$

Dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial linier dapat diselesaikan secara analitik yaitu dengan menggunakan Transformasi Laplace, akan tetapi pada bentuk yang sangat kompleks, persamaan diferensial (khususnya persamaan diferensial non-linier) tersebut menjadi sangat sulit untuk diselesaikan. Untuk itu, Metode Numerik menjadi salah alternatif yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial yang sangat kompleks tersebut. Beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan secara analitik yaitu: Metode Euler, Metode Heun, Metode Deret Taylor, Metode Runge-Kutta, dan Metode Prediktor-Korektor. Namun penyelesaian yang dihasilkan dari metode numeric tersebut bukanlah penyelesaian umum melainkan penyelesaian khusus (atau lebih disebut dengan penyelesaian numerik) dengan nilai awal atau nilai batasnya ditentukan/diketahui [4].

Salah satu metode numerik yang banyak digunakan dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial adalah metode Runge-Kutta khususnya metode Runge-Kutta orde empat karena metode ini memiliki presisi dan akurasi yang cukup tinggi, sehingga penyelesaian khusus yang diperoleh hampir mendekati penyelesaian analitiknya. Pada tulisan ini akan dibahas penggunaan metode Runge-Kutta orde empat dalam menyelesaiakan salah satu masalah fisis yaitu rangkaian listrik seri LC dengan tegangan yang diberikan adalah tegangan bolak-balik.

1.1. Rangkaian Listrik Seri LC

Rangkaian Listrik Seri LC adalah rangkaian listrik yang terdiri induktor yang dilambangan dengan L dan kapasitor yang dilambangkan dengan C. Rangkaian LC ini ditunjukan dengan gambar dibawah ini.



Gambar 1.RangkaianListrik Seri LC

Rangkaian Listrik pada Gambar 1. diberi tegangan bolak-balik yaitu $V(t) = V\cos(\omega t + \theta)$ [4]. Dalam hal ini :

$$V(t) = V_L + V_C \tag{3}$$

Selanjutnya, V_L dan V_C dirumuskan berturut-turut sebagai berikut $V_L = L\frac{di}{dt}$ dan $V_C = \frac{q}{C}$, dengan $i = \frac{dq}{dt}$.

Sehingga persamaannya menjadi :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = V\cos(\omega t + \theta) \tag{4}$$

dengan

L : Induktansi Listrik (Hendri)

C : Kapasitor (Farad)

q : Muatan (Coulomb)

Secara umum, persamaan yang timbul dari permasalahan rangkaian listrik seri LC, dikategorikan sebagaikan persamaan diferensial orde dua.

1.2. MetodeRunge-KuttaOrde 4

Metode Runge-Kutta adalah salah satu alternatif lain dari metode deret Taylor dalam menyelesaikan persamaan diferensial karena yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini

berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan menentukan turunan persamaan diferensial dengan mengevaluasi fungsi $f(x,y)$ pada titik tertentu (titik terpilih) dalam setiap langkah perhitungan (iterasi) [2].
Diberikan Persamaan diferensial

$$y' = f(t,y) \text{ dengan nilai awal } y(0) = y_0 \tag{5}$$

Penyelesaian Persamaan diferensial (5) berada pada selang $[a,b]$. Selanjutnya, jika selang ini dipartisi sebanyak M maka dapat dihitung lebar partisinya (*step size*) yaitu [2]:

$$h = \frac{b-a}{M} \tag{6}$$

Bentuk umum Metode Runge-Kutta Orde Empat, yaitu:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

dengan

$$k_1 = hf(t_{k,} y_k)$$

$$k_2 = hf\left(t_{k,} + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_{k,} + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_{k,} + h, y_k + k_3)$$

2. Hasil dan Pembahasan

Persamaan (4) yang merupakan persamaan diferensial orde dua yang ditimbul dari permasalahan rangkaian listrik seri LC. Untuk menentukan penyelesaian dari Persamaan (4) maka persamaan tersebut harus diubah menjadi persamaan diferensial orde satu. Selanjutnya karena diketahui $i = \frac{dq}{dt}$ maka

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\left(\frac{dq}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \tag{8}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan Persamaan (8) ke Persamaan (4) maka diperoleh

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = V\cos(\omega t + \theta)$$

$$\Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = V\cos(\omega t + \theta)$$

$$\Leftrightarrow L\frac{di}{dt} = V\cos(\omega t + \theta) - \frac{q}{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\left(V\cos(\omega t + \theta) - \frac{q}{C}\right)}{L} \tag{9}$$

Lebih lanjut, akan dilakukan dua kali perhitungan rekursif dengan menggunakan lebar partisi (*step size*) yang lebih kecil yaitu $h=0{,}01$ dan $h=0{,}02$ dengan diberikan nilai awal $i(0)=i_0$ dan $q(0)=q_0$ pada saat $t=0$. Misalkan diberikan nilai awal $i_0=2$ dan $q_0=1$ dan ditetapkan nilai tegangan $V=1$ volt, kapasitor $C=1$ Farad, Induktansi $L=1$, Omega $\omega=1$ serta $\theta=1$, maka Persamaan (9) dapat ditulis menjadi

$$\frac{di}{dt}=\cos(t+1)-q \tag{10}$$

Jika dimisalkan $\frac{di}{dt}=i'=f(t,q)$ maka Persamaan (10) dapat ditulis menjadi

$$f(t,q)=\cos(t+1)-q \tag{11}$$

Berdasarkan Persamaan (11) bentuk umum Metode Runge-Kutta orde empat untuk menyelesaikan masalah rangkaian listirk seri LC sebagai berikut :

$$i_{k+1}=i_k+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \tag{13}$$

dengan

$$k_1=hf\left(t_n,q_n\right)$$

$$k_2=hf\left(t_n+\frac{1}{2}h,q_n+\frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3=hf\left(t_n+\frac{1}{2}h,q_n+\frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4=hf\left(t_n+h,q_n+k_3\right)$$

Jika $t_{n+1}=t_n+h$ dan $q_{n+1}=q_n+h\cdot i_n$ maka dengan menggunakan program MATLAB untuk $h=0{,}01$ diperoleh hasil yang diperlihatkan pada Gambar 2 berikut :

Command Window

iter	t	q	i
0	0.000000	1.000000	2.000000
1	0.010000	1.020000	1.995384
2	0.020000	1.039954	1.990485
3	0.030000	1.059859	1.985302
4	0.040000	1.079712	1.979836
5	0.050000	1.099510	1.974086
6	0.060000	1.119251	1.968054
7	0.070000	1.138931	1.961738
8	0.080000	1.158549	1.955139
9	0.090000	1.178100	1.948257
10	0.100000	1.197583	1.941092
11	0.110000	1.216994	1.933645
12	0.120000	1.236330	1.925915
13	0.130000	1.255589	1.917904
14	0.140000	1.274768	1.909611
15	0.150000	1.293864	1.901036
16	0.160000	1.312875	1.892181
17	0.170000	1.331797	1.883045
18	0.180000	1.350627	1.873630
19	0.190000	1.369363	1.863935
20	0.200000	1.388003	1.853961
21	0.210000	1.406542	1.843710
22	0.220000	1.424979	1.833180
23	0.230000	1.443311	1.822374
24	0.240000	1.461535	1.811291
25	0.250000	1.479648	1.799933
26	0.260000	1.497647	1.788301
27	0.270000	1.515530	1.776395
28	0.280000	1.533294	1.764215
29	0.290000	1.550936	1.751764
30	0.300000	1.568454	1.739041
31	0.310000	1.585844	1.726048
32	0.320000	1.603105	1.712786
33	0.330000	1.620233	1.699256
34	0.340000	1.637225	1.685459
35	0.350000	1.654080	1.671396
36	0.360000	1.670794	1.657068
37	0.370000	1.687365	1.642477
38	0.380000	1.703789	1.627623
39	0.390000	1.720066	1.612508
40	0.400000	1.736191	1.597133
41	0.410000	1.752162	1.581500
42	0.420000	1.767977	1.565609
43	0.430000	1.783633	1.549463
44	0.440000	1.799128	1.533063
45	0.450000	1.814458	1.516409
46	0.460000	1.829622	1.499505
47	0.470000	1.844617	1.482350
48	0.480000	1.859441	1.464948
49	0.490000	1.874090	1.447298
50	0.500000	1.888563	1.429404

Gambar 2. Hasil Perhitungan untuk $h = 0{,}01$.

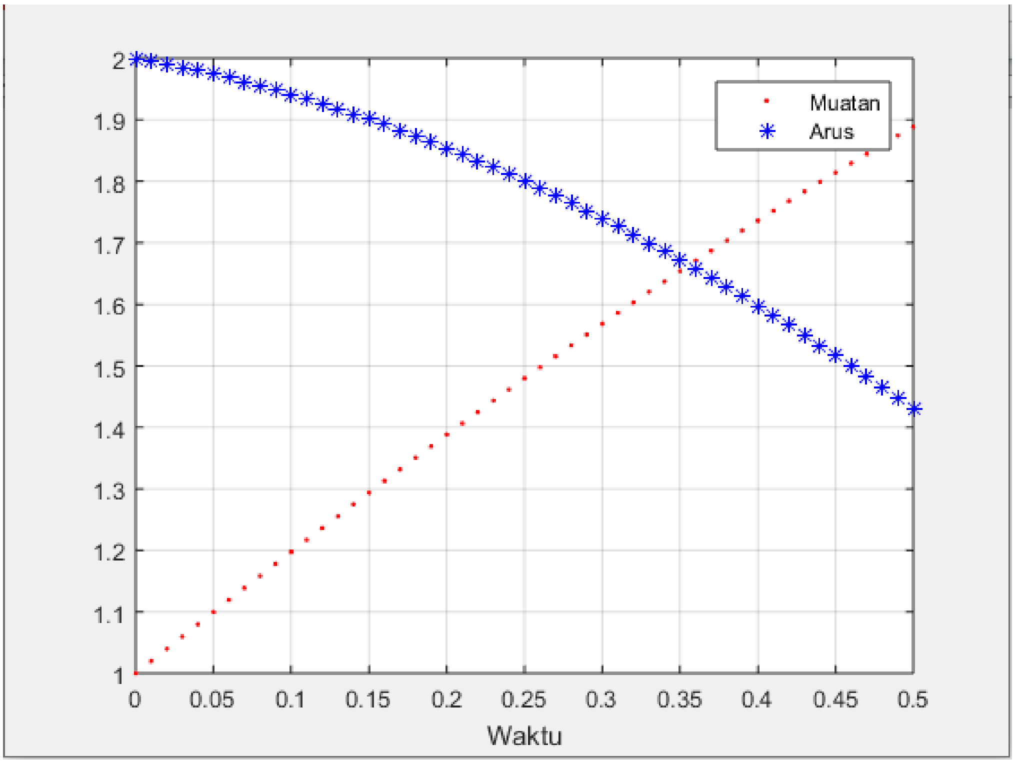
Sedangkan untuk $h = 0{,}02$ diperoleh hasil yang diperlihatkan pada Gambar 3 berikut :

Command Window

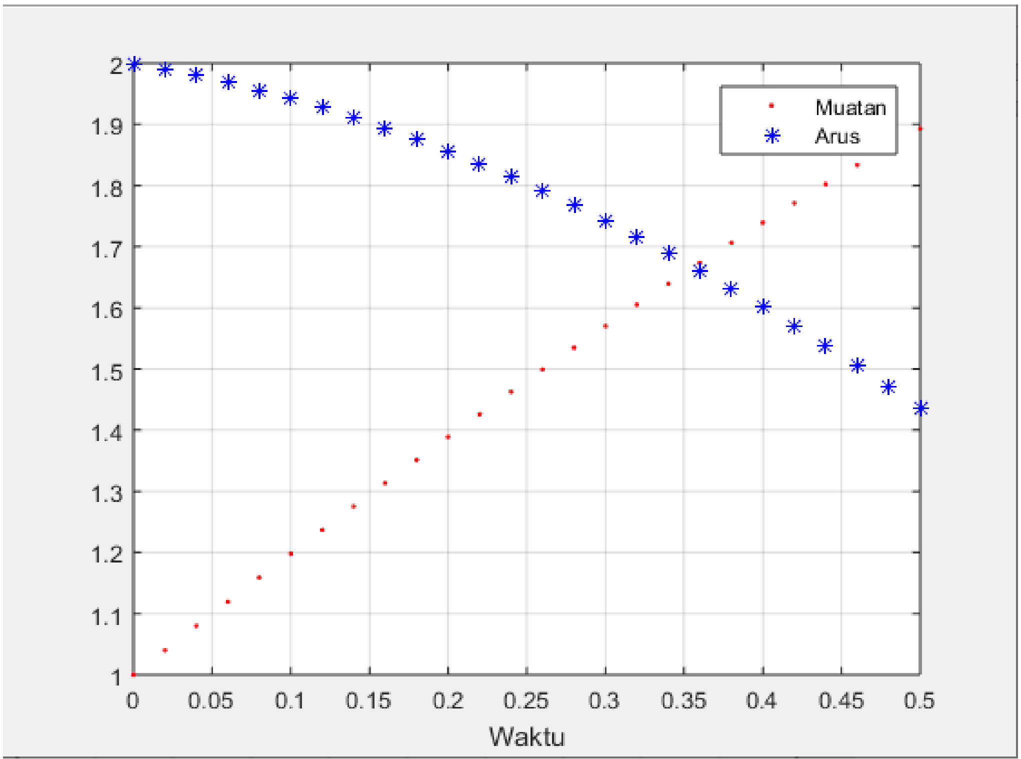
iter	t	q	i
0	0.000000	1.000000	2.000000
1	0.020000	1.040000	1.990729
2	0.040000	1.079815	1.980329
3	0.060000	1.119421	1.968800
4	0.080000	1.158797	1.956140
5	0.100000	1.197920	1.942351
6	0.120000	1.236767	1.927435
7	0.140000	1.275316	1.911393
8	0.160000	1.313544	1.894228
9	0.180000	1.351428	1.875943
10	0.200000	1.388947	1.856541
11	0.220000	1.426078	1.836028
12	0.240000	1.462798	1.814407
13	0.260000	1.499087	1.791685
14	0.280000	1.534920	1.767867
15	0.300000	1.570278	1.742960
16	0.320000	1.605137	1.716972
17	0.340000	1.639476	1.689909
18	0.360000	1.673274	1.661781
19	0.380000	1.706510	1.632597
20	0.400000	1.739162	1.602366
21	0.420000	1.771209	1.571098
22	0.440000	1.802631	1.538803
23	0.460000	1.833407	1.505494
24	0.480000	1.863517	1.471182
25	0.500000	1.892941	1.435880

Gambar 3. Hasil Perhitungan untuk $h = 0{,}02$.

Dari hasil perhitungan terlihat jelas bahwa untuk $h = 0{,}01$ terdapat 50 iterasi dengan besarnya muatan dihitung dari waktu $t = 0$ sampai $t = 0{,}5$. Sedangkan untuk $h = 0{,}02$ dengan besarnya muatan dihitung pada waktu yang sama hanya terdapat 25 iterasi. Hal ini membuktikan bahwa dengan memilih nilai *step size* yang sangat kecil akan menghasilkan penyelesaian lebih akurat dengan waktu perhitungan lebih singkat. Untuk lebih memperjelas dapat dilihat dari grafik di bawah ini.



Gambar 4. Grafik Perhitungan Muatan (q) dan Kuat Arus (i) terhadap waktu t untuk $h = 0{,}01$.



Gambar 5. Grafik Perhitungan Muatan (q) dan Kuat Arus (i) terhadap waktu t untuk $h = 0{,}02$.

3. Kesimpulan

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan salah satu metode numerik yang lebih cepat dan efisien dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde dua yang sulit diselesaikan secara analitik. Salah satu factor penting yang mempengaruhi penyelesaian numeric dengan metode ini adalah pengambilan nilai*s tep size*. Nilai *step size* yang sangat kecil membuat perhitungan secara komputasi menghasilkan penyelesaian yang lebih akurat dengan waktu lebih singkat serta langkah perhitungan yang lebih kecil bila dibandingkan nilai *step size* yang lebih besar.

Referensi

[1] Basuki, Ahmad. (2006). *Metode Numerik Sebagai Algoritma Komputasi*. Andi Offset. Yogyakarta.

[2] J. H. Mathews. (1999) *Numerical Methods with MATLAB*., Prentice Hall.

[3] Maiyena, Sri. (2011, Desember). Penggunaan Metode Euler Pada Persamaan Diferensial Orde Dua Pada Rangkaian Listrik Seri LC . *Jurnal Sainstek* 3(2). 176-181.

[4] S.M Nababan, (2008). *Persamaan Diferensial Biasa Edisi 1*. Universitas Terbuka. Jakarta.