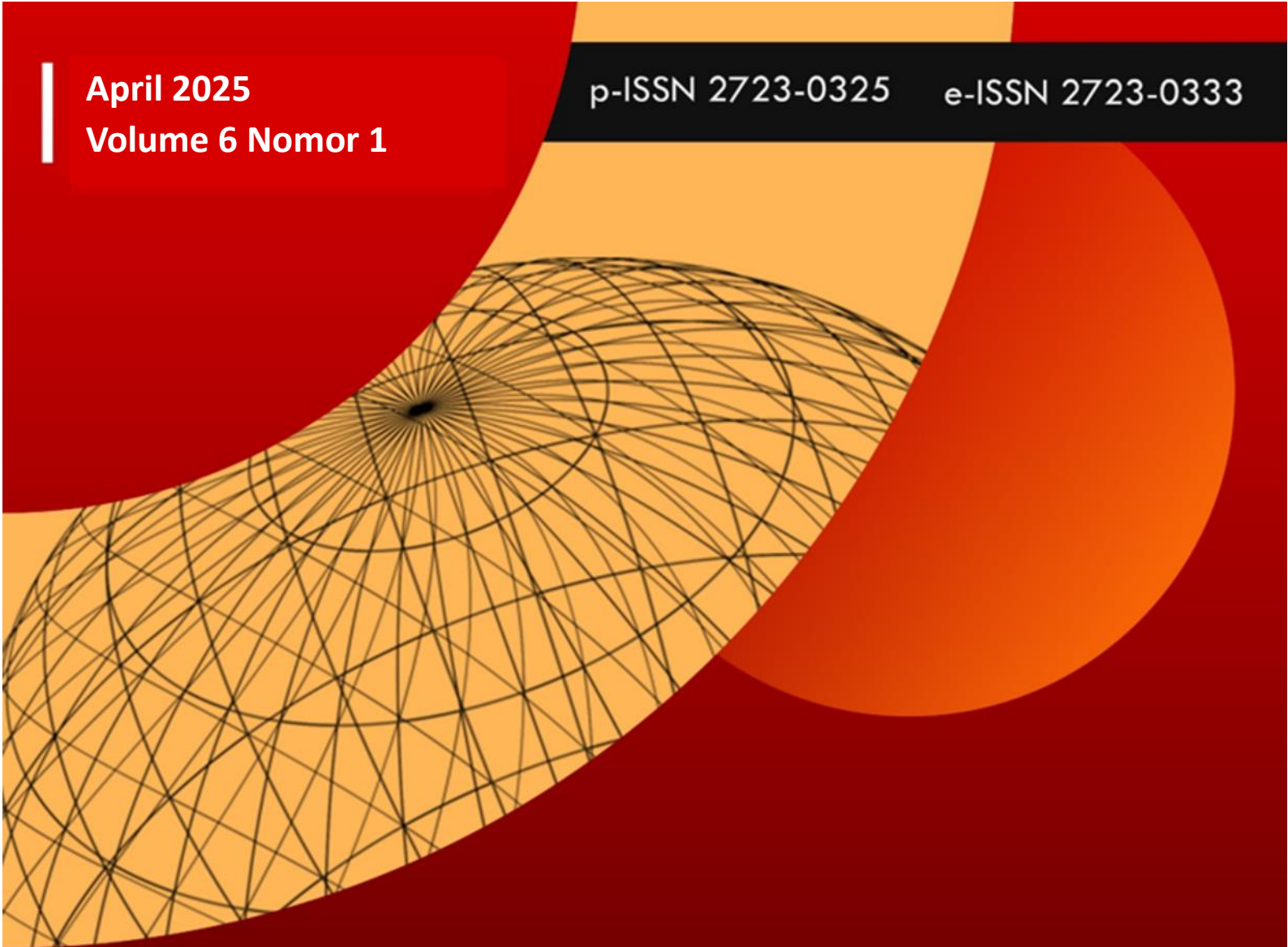


April 2025

Volume 6 Nomor 1

p-ISSN 2723-0325

e-ISSN 2723-0333



TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PATTIMURA



is an international academic open-access journal that gains a foothold in mathematics, and its applications are issued twice a year. The focus is to publish original research and review articles on all aspects of pure and applied Mathematics. Editorial board members of the Journal and reviewers will review submitted papers. All submitted articles should report original, previously unpublished research results, experimental or theoretical, and will be peer-reviewed. Articles submitted to the journal should meet these criteria and must not be under consideration for publication elsewhere. Manuscripts should follow the journal template and are subject to both review and editing.

Published by:

**Department of Mathematics,
Faculty of Science and Technology,
Pattimura University.
Ambon
2025**

Copyright© Program Studi Matematika FST UNPATTI 2025



Volume 6 Number 1 | April 2025

Person In Charge

Head of Undergraduate Program in Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Pattimura University

Editor in Chief

Dr. H. Batkunde, S.Si, M.Si

Editors

M. I. Tilukay, S.Si, M.Si (Managing and Section Editor)
L. Bakarbessy, S.Si, M.Si (Managing and Section Editor)
Z. A. Leleury, S.Si., M.Si (Copy and Production Editor)
B. P. Tomasouw, S.Si, M.Si (Copy and Production Editor)
Dr. L. K. Beay, S.Pd., M.Si (Proofreader)
N. Dahoklory (Proofreader)

Secretariat and Financial Officer

M. E. Rijoly, S.Si, M.Sc

Graphic Design

V. Y. I. Ilwaru, S.Si, M.Si

Expert Editorial Boards

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc (Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Indonesia)
Prof. Dr. M. Salman A. N, M.Si (Institut Teknologi Bandung, Indonesia)
Dr. H. J. Wattimanela, S.Si., M.Si (Universitas Pattimura, Indonesia)
Dr. Al Azhary Masta, S.Si., M.Si (Universitas Pendidikan Indonesia, Indonesia)
Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si (Universitas Hasanudin, Indonesia)
Dr. Meta Kallista, S.Si., M.Si (Universitas Telkom, Indonesia)
Dr. Teguh Herlambang, S.Si., M.Si (Universitas Nahdlatul Ulama Surabaya, Indonesia)
Asst. Prof. Dr. Anurak Thanyacharoen (Muban Chombueng Rajabhat University, Ratchaburi, Thailand)

Publisher

Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University, Ambon, Indonesia

Editorial Address

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon 97233, Provinsi Maluku, Indonesia
Contact : +62 82397854220
Email : tensormathematics@gmail.com



Modeling the Spread of Hepatitis B Disease from the SEIR Model in East Java Using RKF45	Sakinun Na'malia Faisol Tony Yulianto	1-12
Analisis Perbandingan Optimasi <i>Stochastic Gradient Descent</i> dan <i>Adaptive Moment Estimation</i> dalam Klasifikasi Emosi dari Audio Menggunakan <i>Convolutional Neural Network</i>	Aldelia Jocelyn Tutuhaturunewa Dorteus Lodewyik Rahakbauw Zeth Arthur Leleury	13-22
Kajian Basis dan Dimensi pada Ruang Hipervektor Atas Lapangan	Loisa Genesis Kambu Henry W. M. Patty Lusye Bakarbesy Novita Dahoklory	23-38
Fungsi Trace dan Fungsi Norm Lapangan Perluasan Atas $\mathbb{Q}$	Novita Dahoklory Henry W. M. Patty	39-48
Optimasi Model LSTM untuk Prediksi Curah Hujan di Kota Ambon: Perbandingan Mean Imputation dan Interpolasi dalam Prediksi Data Time Series	Emanuella M. C. Wattimena Pranaya D. M. Taihuttu Devi V. Waas Citra F. Palembang Victor E. Pattiradjawane ¹	49-56
The Rainbow Vertex Connection Number of Some Amalgamation of Two Cycles	Pranaya D. M. Taihuttu Meilin I. Tilukay Francis Y. Rumlawang E. M. C. Wattimena	57-66

Kajian Basis dan Dimensi pada Ruang Hipervektor Atas Lapangan

Loisa Genesis Kambu^{1*}, Henry W. M. Patty², Lusye Bakarbesy³, Novita Dahoklory⁴

^{1,2,3,4} Jurusan Matematika FST Universitas Pattimura, Jl. Ir. M. Putuhena, Ambon, Indonesia.

*Email: henrywmpatty81@gmail.com

Manuscript submitted : February 2025;

Accepted for publication : April 2025.

doi: <https://doi.org/10.30598/tensorvol6iss1pp23-38>

Abstrak: The concept of algebraic hyperstructure is a generalization of the concept of algebraic structure. The algebraic hyperstructure discussed in this study is the hypervector space. The aim of this paper is to examine the basis and dimension in hypervector spaces. In a hypervector space, there exists a strong left distributive property, namely $(a + b) \circ x = a \circ x + b \circ x$, $\forall a, b \in K, \forall x \in V$. Furthermore, in a hypervector space that possesses the K -invertible property, the importance of the strong left distributive property and the invertible property in hypervector spaces ensures that every linearly independent set has at most n elements, where n is the dimension of the hypervector space. Consequently, adding vectors from outside the basis will result in a set that is not linearly independent.

2010 Mathematical Subject Classification: 20N20, 15A03

Keywords: dimension. hypervector space, k -invertible, linear independence, span.

1. Pendahuluan

Struktur aljabar merupakan kajian matematika yang berperan dalam memahami berbagai konsep fundamental, seperti grup, lapangan, dan ruang vektor. Struktur ini dikembangkan melalui proses generalisasi, salah satunya adalah konsep hiperstruktur aljabar.

Hiperstruktur aljabar menggeneralisasi struktur aljabar konvensional dengan menggunakan hiperoperasi. Berbeda dari operasi biner, hiperoperasi memetakan pasangan elemen ke himpunan bagian. Jika a dan b adalah elemen himpunan H , maka hasil hiperoperasi $a \circ b$ dalam himpunan, bukan elemen tunggal. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh F. Marty pada 1934 melalui hipergrup, yang merupakan generalisasi grup dengan operasi biner digantikan oleh hiperoperasi. Dalam hipergrup, sifat dasar grup seperti asosiatif, identitas, dan invers tetap dapat didefinisikan dalam konteks himpunan, memberikan fleksibilitas lebih luas dibandingkan grup.

Ruang hipervektor merupakan pengembangan dari hiperstruktur dan generalisasi ruang vektor, di mana operasi pergandaan skalar digantikan oleh hiperoperasi. Akibatnya, hasil pergandaan skalar dengan vektor bukan satu vektor tunggal, melainkan himpunan vektor.

Dalam ruang vektor dikaji basis dan dimensi. Basis merupakan himpunan vektor yang bebas linear dan merentang ruang vektor tersebut artinya setiap vektor dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor dalam basis dengan koefisien yang berasal dari lapangan skalar yang sesuai. Jika sebuah ruang vektor memiliki basis yang terdiri dari n vektor maka ruang tersebut memiliki dimensi n , yang menyiratkan bahwa setiap vektor dalam ruang itu dapat direpresentasikan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari tepat n vektor bebas linear. Termotivasi dari himpunan merentang dan bebas linear pada ruang hipervektor, himpunan B merentang V , jika setiap vektor di $v \in V$ dapat dinyatakan sebagai $v = x_1 +$

$x_2 + \dots + x_n$, dengan $x_i \in \alpha_i \circ b_i, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$. Himpunan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ dikatakan bebas linear jika $B \subseteq V$ dengan $0 \in \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Pada ruang vektor diketahui bahwa basis memiliki beberapa sifat khusus yaitu setiap ruang vektor memiliki basis dan jumlah vektor dalam suatu basis sama yang memotivasi pendefinisian dimensi suatu ruang vektor.

2. Tinjauan Pustaka

Teori hiperstruktur aljabar pertama kali diperkenalkan oleh F. Marty pada tahun 1934 dalam makalahnya yang berjudul "*Sur une generalization de la notion de groupe*" pada Kongres Matematikawan Skandinavia ke-8. Salah satu penerapannya dikaji oleh Huwae dkk. pada tahun 2024, yang membahas konsep semihipergrup dalam analisis reaksi redoks antara unsur Aktinium (Ac) dan Berkelium (Bk). Penelitian ini menggunakan kajian literatur untuk menyusun tabel operasi, menunjukkan peran penting aljabar dalam memahami interaksi kimia. Teori hiperstruktur berkembang dengan diperkenalkannya ruang hipervektor oleh Scafati Tallini (1990), kemudian R. Ameri (2005) meneliti ruang hipervektor fuzzy, lalu bersama O. R. Dehghan (2008) mengkaji ketergantungan linear, basis, dan dimensi. Pada 2019, O. R. Dehghan dkk. memperkenalkan contoh nontrivial baru serta membahas span, basis terurut, koordinat, dan transformasi linear.

2.1. Ruang Vektor

Pada bagian ini akan dijelaskan konsep ruang vektor. Namun sebelumnya dibahas terlebih dahulu konsep lapangan.

Definisi 2.1.1 (Muchlisah, 1999)

Suatu himpunan F yang dilengkapi operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$ disebut lapangan, $(F, +, \cdot)$ jika memenuhi:

- $(F, +)$ merupakan grup komutatif
- $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ semigrup dengan elemen satuan dan setiap elemen tak nol memiliki invers
- $(F, +, \cdot)$ Bersifat distributif

Definisi 2.1.2 (Roman, 2006)

Misalkan F merupakan lapangan dan V himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi $+$ dan $\cdot$ disebut ruang vektor jika memenuhi :

$(V, +)$: grup komutatif

$(F, +, \cdot)$: lapangan

$$\begin{aligned} \cdot : F \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightarrow \cdot (\alpha, v) = \alpha v \end{aligned}$$

Aksioma:

- $(\forall \alpha \in F) (\forall u, v \in V) \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,
- $(\forall \alpha, \beta \in F) (\forall u \in V) (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, (\forall \alpha, \beta \in F) (u \in V)$
- $1u = u1 = u, (\forall u \in V)$.

Definisi 2.1.3 (Anton & Rorres, 2013)

Diberikan V ruang vektor atas lapangan F . Himpunan $W \neq \emptyset$ dan $W \subseteq V$. Himpunan W adalah subruang vektor dari V jika W juga ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan skalar yang sama di V .

Teorema 2.1.4 (Roman, 2006)

Diberikan V ruang vektor atas lapangan F , himpunan $W \neq \emptyset$ dan $W \subseteq V$. Himpunan W adalah subruang vektor dari V jika memenuhi

- $(\forall u, v \in W), u - v \in W$
- $(\forall u \in W)(\forall k \in F), ku \in W$

2.2. Kombinasi Linear, Merentang (span), dan Bebas Linear

Pada bagian ini akan dibahas kombinasi linear, merentang (span), dan bebas linear serta beberapa contoh dari masing-masing konsep tersebut.

Definisi 2.2.1 Kombinasi Linear (Anton & Rorres, 2013)

Diberikan V ruang vektor atas lapangan F . Vektor $v \in V$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor $w_1, w_2, \dots, w_n$ jika terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sedemikian sehingga

$$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n.$$

Definisi 2.2.2 Merentang span (Anton & Rorres, 2013)

Diberikan V ruang vektor atas lapangan F . Vektor-vektor $w_1, w_2, \dots, w_n$ merentangkan ruang vektor V jika untuk setiap $v \in V$ merupakan kombinasi linear dari $w_1, w_2, \dots, w_n$.

Definisi 2.2.3 Bebas linear (Anton & Rorres, 2013)

Himpunan vektor-vektor $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dikatakan bebas linear (*linearly independent*) jika

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = 0.$$

Maka

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Jika ada penyelesaian lain maka himpunan tersebut dikatakan bukan bebas linear.

2.3. Basis dan Dimensi

Pada bagian ini akan dijelaskan konsep basis dan dimensi. Basis merupakan suatu ukuran tertentu yang menyatakan komponen dari sebuah vektor. Dimensi biasanya dihubungkan dengan ruang, misalnya garis adalah ruang dengan dimensi 1, bidang adalah ruang dengan dimensi 2 dan seterusnya.

Definisi 2.3.1 (Anton, 2000)

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor dalam V , maka S disebut suatu basis untuk V jika S bebas linear dan S merentang V .

Teorema 2.3.2 (Roman, 2006)

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor V , maka setiap vektor v pada V dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk

$$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n.$$

Definisi 2.3.3 (Anton & Rorres, 2013)

Dimensi dari ruang vektor berdimensi terbatas V dilambangkan dengan $\dim(V)$ dan didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam basis untuk V . Selain itu, ruang vektor nol didefinisikan memiliki dimensi nol.

2.4. Hiperstruktur Aljabar

Hiperstruktur aljabar merupakan generalisasi dari struktur aljabar. Akan tetapi, jika pada struktur aljabar hasil operasi dua elemen berupa elemen, pada hiperstruktur aljabar, hasil hiperoperasi dua buah elemen berupa himpunan. Selanjutnya diberikan definisi terkait konsep hiperstruktur aljabar yaitu semihipergrup dan hipergrup. Berikut ini diberikan definisi dari semihipergrup.

Definisi 2.4.1 (Davvaz, 2013). Suatu hipegropoid $(H, \circ)$ disebut semihipergrup jika memenuhi

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \text{ untuk setiap } a, b, c \in H$$

dan berarti bahwa

$$\bigcup_{u \in a \circ b} u \circ c = \bigcup_{v \in b \circ c} a \circ v$$

Semihipergrup $(H, \circ)$ dikatakan komutatif bila memenuhi

$$x \circ y = y \circ x \text{ untuk setiap } x, y \in H.$$

Definisi 2.4.2 (Davvaz, 2013). Suatu hipegropoid $(H, \circ)$ disebut suatu kuasihipergrup bila berlaku

$$a \circ H = H \circ a = H \text{ untuk semua } a \in H$$

Definisi 2.4.3 (Davvaz, 2013) Suatu hipegropoid $(H, \circ)$ disebut hipergrup jika memenuhi aksioma berikut:

- i. $(\forall x, y, z \in H) x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (semihipergrup)
- ii. $(\forall x \in H) x \circ H = H \circ x = H$ (kuasihipergrup).

3. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah kajian literatur, dimana peneliti mengkaji beberapa tulisan yang berhubungan dengan penelitian, kemudian merangkum hasil-hasil penelitian dalam sebuah tulisan ilmiah. Berdasarkan jenis penelitian diatas, maka bahan dan materi yang digunakan dalam penelitian ini berupa beberapa karya ilmiah dari matematikawan yang disajikan dalam bentuk buku (dapat berupa e-book), jurnal, artikel, dan informasi ilmiah lainnya yang diperoleh dari media elektronik seperti internet.

4. Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini akan dibahas mengenai karakteristik basis dan dimensi pada ruang hipervektor. Pembahasan ini mencakup sifat-sifat bebas linear dan merentang pada ruang hipervektor serta basis dan dimensi dengan penambahan sifat distributif kiri kuat dan k-invertible

4.1. Ruang Hipervektor

Pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep ruang hipervektor dan subhiperruang termasuk definisi, sifat-sifat, serta contoh yang menggambarkan konsep ini.

Definisi 4.1.1 (Tallini, 1990) Misalkan K adalah lapangan dan didefinisikan ruang hipervektor atas K sebagai 4-tuplet $(V, +, \circ, K)$ sedemikian sehingga $(V, +)$ merupakan grup abelian dan

$$\circ: K \times V \rightarrow P^*(V)$$

adalah pemetaan untuk setiap $\alpha, \beta \in K$ dan $v_1, v_2 \in V$ berlaku aksioma berikut

$$H_1 (\alpha + \beta) \circ v_1 \subseteq (\alpha \circ v_1) + (\beta \circ v_1)$$

$$H_2 \alpha \circ (v_1 + v_2) \subseteq (\alpha \circ v_1) + (\alpha \circ v_2)$$

$$H_3 \alpha \circ (\beta \circ v_1) = (\alpha\beta) \circ v_1$$

$$H_4 \alpha \circ (-v_1) = (-\alpha) \circ v_1 = -(\alpha \circ v_1)$$

$$H_5 v_1 \in 1 \circ v_1.$$

Selanjutnya, pada bagian H_1 , operasi penjumlahan dalam pengertian Frobenius, yaitu

$$a \circ x + a \circ y = \{p + q : p \in a \circ x, q \in a \circ y\}.$$

Hal yang sama berlaku pada H_2 . Untuk, H_3 operasi $a \circ (b \circ x)$ didefinisikan sebagai

$$a \circ (b \circ x) = \bigcup_{y \in b \circ x} a \circ y.$$

$(V, +, \circ, K)$ disebut anti-distributif kiri jika

$$(a + b) \circ x \supseteq a \circ x + b \circ x, \quad \forall a, b \in K, \forall x \in V,$$

dan distributif kiri kuat, jika

$$(a + b) \circ x = a \circ x + b \circ x, \quad \forall a, b \in K, \forall x \in V.$$

Dengan cara yang sama mendefinisikan anti-distributif kanan dan distributif kanan kuat. V disebut distributif kuat jika berdistributif kiri kuat dan kanan.

Lemma 4.1.2 Misalkan $(V, +, \circ, K)$ adalah ruang hipervektor dan $\Omega v = 0 \circ \underline{0}$ dengan $\underline{0}$ sebagai elemen nol dari $(V, +)$. Berlaku

1. Jika V adalah distributif kanan atau kiri yang kuat, maka Ωv merupakan subgrup dari $(V, +)$.
2. Jika V anti-distributif kiri dan untuk setiap $x \in V, 0 \circ x \supseteq \Omega v$ maka untuk setiap $x \in V, 0 \circ x$ subgrup dari $(V, +)$.
3. Jika V distributif kiri kuat, maka $a \circ \underline{0} = \Omega v = a \circ \Omega v$, untuk setiap $a \in K$.

Bukti

1. Jika V adalah distributif kanan atau kiri yang kuat, maka Ωv merupakan subgrup dari $(V, +)$.

Ambil sebarang $a, b \in \Omega v$

Akan ditunjukkan $a - b \in \Omega v$

$a \in \Omega v$ artinya $a \in 0 \circ \underline{0}$ dan $b \in \Omega v$ artinya $b \in 0 \circ \underline{0}$

$$a - b \in (0 \circ \underline{0}) + (-0 \circ \underline{0})$$

$$= (0 - 0) \circ \underline{0} \quad H_1$$

$$= 0 \circ \underline{0}$$

$$= \Omega v.$$

2. Jika V anti-distributif kiri dan untuk setiap $x \in V, 0 \circ x \supseteq \Omega v$ maka untuk setiap $x \in V, 0 \circ x$ merupakan subgrup dari $(V, +)$.

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in 0 \circ x$

Akan ditunjukkan $x_1 - x_2 \in 0 \circ x$

Karena V anti-distributif kiri maka

$$\begin{aligned} (0 - 0) \circ x &\supseteq 0 \circ x + 0 \circ x \\ 0 \circ x &\supseteq 0 \circ x + 0 \circ x \end{aligned}$$

karena $x_1, x_2 \in 0 \circ x$, maka $x_1 - x_2 \in 0 \circ x$

selain itu, dari asumsi $0 \circ x \supseteq \Omega v$ dan diketahui $\Omega v = 0 \circ \underline{0}$ maka $0 \circ x$ memuat Ωv .

3. jika V distributif kiri kuat, maka $a \circ \underline{0} = \Omega v = a \circ \Omega v$, untuk setiap $a \in K$.

Ambil sebarang $a \in K$ dan $\underline{0} \in V$

Akan ditunjukkan $a \circ \underline{0} = \Omega v = a \circ \Omega v$

Diketahui

$$\Omega v = 0 \circ \underline{0}$$

maka

$$\begin{aligned} a \circ \Omega v &= a \circ (0 \circ \underline{0}) \\ &= (a \circ 0) \circ \underline{0} \quad (H_3) \end{aligned}$$

Karena $0 \in K$ maka berlaku

$$a \circ 0 = 0.$$

Sehingga

$$(a \circ 0) \circ \underline{0} = 0 \circ \underline{0} = \Omega v.$$

Jadi, diperoleh

$$a \circ \Omega v = \Omega v. \blacksquare$$

Teorema 4.1.3 Diberikan $(V, +, \circ, K)$ adalah ruang hipervektor distributif kiri kuat sedemikian sehingga $|1 \circ \underline{0}| = 1$ dan untuk setiap $x \in V, -x \neq x$, kecuali $x = \underline{0}$. Maka untuk setiap $x \in V$, berlaku

$$x = \underline{0} \Leftrightarrow \forall a \in K, a \neq 0, a \circ x + a \circ x = \Omega.$$

Bukti

$\Rightarrow$ Misalkan $x = \underline{0}$ dan $0 \neq a \in K$. Akan ditunjukkan bahwa

$$a \circ x + a \circ x = \Omega.$$

Berdasarkan **Lemma 4.1.2**, berlaku

$$a \circ x + a \circ x = a \circ \underline{0} + a \circ \underline{0}.$$

Karena $a \circ \underline{0} = \Omega$, maka

$$\begin{aligned} a \circ x + a \circ x &= \Omega + \Omega. \\ \Omega + \Omega &= \Omega. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Misalkan $a \circ x + a \circ x = \Omega$. Akan ditunjukkan bahwa $x = \underline{0}$.

$$\begin{aligned} a \circ (x + x) &= a \circ x + a \circ x \\ a \circ 2x &= a \circ x + a \circ x \\ a \circ 2x &= \Omega \\ a \circ 2x &= a \circ \underline{0}. \end{aligned}$$

Kalikan kedua ruas dengan a^{-1} , diperoleh

$$\begin{aligned} a^{-1} \circ (a \circ 2x) &\subseteq a^{-1} \circ (a \circ \underline{0}). \\ (a^{-1}a) \circ 2x &\subseteq (a^{-1}a) \circ \underline{0} \\ 1 \circ 2x &\subseteq 1 \circ \underline{0} \\ 1 \circ 2x &\subseteq \{\underline{0}\} \end{aligned}$$

Ini artinya

$$\begin{aligned} 2x &= \underline{0} \\ x &= \underline{0} \end{aligned}$$

Jadi $x = -x$ karena $x = \underline{0}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$x = \underline{0} \Leftrightarrow \forall a \in K, a \neq 0, a \circ x + a \circ x = \Omega. \blacksquare$$

Definisi 4.1.4 (Tallini, 1994) Diberikan himpunan bagian tak kosong W dari V disebut subhiperruang dari V , jika W merupakan ruang hipervektor dengan hiperoperasi yang didefinisikan pada V , yaitu

- i. $(\forall x, y \in W), x - y \in W$,
- ii. $(\forall a \in K)(\forall x \in W), a \circ x \subseteq W$.

Dituliskan dengan $W \subseteq V$.

Teorema 4.1.5 Jika V ruang hipervektor distributif kiri atau kanan yang kuat, maka ΩV adalah subhiperruang terkecil dari V .

Bukti

Akan ditunjukkan Ω_V subhiperruang dari V dan Ω_V adalah subhiperruang terkecil dari V .

1. Ω_V subhiperruang dari V

Berdasarkan **Lemma 4.1.2**, Ω_V merupakan subgrup dari V dan memenuhi

$$a \circ \Omega_V = \Omega_V, \quad \forall a \in K.$$

Maka, Ω_V adalah subhiperruang dari V .

2. Ω_V subhiperruang terkecil dari V

Misalkan H adalah subhiperruang dari V dan $x \in \Omega_V$. Karena $\Omega_V = 0 \circ \underline{0}$, maka

$$x \in 0 \circ \underline{0}$$

karena H subhiperruang dari V , maka $\underline{0} \in H$ dan $0 \circ H \subseteq H$, diperoleh

$$x \in 0 \circ \underline{0} \subseteq 0 \circ H \subseteq H.$$

Karena $x \in \Omega_V$ juga ada di H , maka $\Omega_V \subseteq H$.

Dengan demikian terbukti bahwa Ω_V subhiperruang dari V dan Ω_V adalah subhiperruang terkecil dari V .

■

4.2. Merentang dan Bebas Linear pada Ruang Hipervektor

Pada bagian ini akan dibahas konsep bebas linear dan merentang pada ruang hipervektor.

Definisi 4.2.1 Merentang (Ameri & Dehghan, 2008)

Jika S himpunan tak kosong V , maka merentang S didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned} SP(S) &= \left\{ x \in V : x \in \sum_{i=1}^n a_i \circ y_i, a_i \in K, y_i \in S, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \{x_1 + \dots + x_n : x_i \in a_i \circ y_i, a_i \in K, y_i \in S, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.2.2 $SP(S)$ subhiperruang terkecil V yang memuat S .

Bukti

Akan ditunjukkan $SP(S)$ subhiperruang V dan $SP(S)$ subhiperruang terkecil V yang memuat S .

- i. $SP(S)$ subhiperruang V

- a) $x_1 - x_2 \in SP(S)$

Misalkan $x_1, x_2 \in SP(S)$. Maka

$$x_1 \in \sum_{i=1}^n a_i \circ y_i \text{ dan } x_2 \in \sum_{i=1}^m \acute{a}_i \circ \acute{y}_i$$

dengan $a_i, \acute{a}_i \in K, y_i, \acute{y}_i \in S$. Maka

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\in \sum_{i=1}^n a_i \circ y_i - \sum_{i=1}^m \acute{a}_i \circ \acute{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \circ y_i + \sum_{i=1}^m (-\acute{a}_i) \circ \acute{y}_i \quad (H_4) \end{aligned}$$

Oleh karena kombinasi linear dari elemen-elemen S tetap berada dalam $SP(S)$, maka

$$x_1 - x_2 \in SP(S).$$

- b) $k \circ x_1 \in SP(S)$.

Misalkan $x_1 \in SP(S), k \in K$. Maka

$$\begin{aligned}
k \circ x_1 &\subseteq k \circ \sum_{i=1}^n a_i \circ y_i \\
&\subseteq \sum_{i=1}^n k \circ (a_i \circ y_i) \quad (H_1) \\
&= \sum_{i=1}^n (ka_i) \circ y_i \quad (H_3)
\end{aligned}$$

Karena hasil hiperoperasi terhadap elemen S masih menghasilkan elemen dalam $SP(S)$, maka

$$k \circ x_1 \in SP(S).$$

Berdasarkan (a) dan (b) terbukti bahwa $SP(S)$ adalah subhiperruang dari V atau dengan kata lain $SP(S) \subseteq V$.

ii. $SP(S)$ subhiperruang terkecil V yang memuat S .

Asumsikan W subhiperruang V yang memuat S . Maka untuk setiap $x_1 \in SP(S)$ dapat dinyatakan

$$x_1 \in \sum_{i=1}^n a_i \circ y_i, \quad a_i \in K, y_i \in S.$$

Karena $S \subseteq W$, maka $y_i \in W$. Sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^n a_i \circ y_i \subseteq W \Rightarrow x_1 \in W.$$

Jadi, $SP(S) \subseteq W$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $SP(S)$ subhiperruang V dan $SP(S)$ subhiperruang terkecil V yang memuat S . ■

Teorema 4.2.3 Diberikan V adalah distributif kiri kuat dan $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in V$ sedemikian sehingga $\{y_1, \dots, y_m\}$ merentang V dan $y_1, \dots, y_m \in SP(x_1, \dots, x_n)$. Maka $\{x_1, \dots, x_n\}$ juga merentang V .

Bukti

Diberikan $\{y_1, \dots, y_m\}$ merentang V , artinya

$$V = SP(y_1, \dots, y_m)$$

$y_1, \dots, y_m \in SP(x_1, \dots, x_n)$, artinya

$$\begin{cases}
y_1 \in a_{11} \circ x_1 + \dots + a_{1n} \circ x_n \\
y_2 \in a_{21} \circ x_1 + \dots + a_{2n} \circ x_n \\
\vdots \\
y_m \in a_{m1} \circ x_1 + \dots + a_{mn} \circ x_n,
\end{cases}$$

untuk setiap $a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Akan ditunjukkan bahwa $SP(x_1, \dots, x_n) = V$.

Karena $\{y_1, \dots, y_m\}$ merentang V , maka untuk $x \in V$ terdapat $b_i \in K, 1 \leq i \leq m$ sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned}
x &\in b_1 \circ y_1 + \dots + b_m \circ y_m \\
x &\in b_1 \circ (a_{11} \circ x_1 + \dots + a_{1n} \circ x_n) + \dots + b_m \circ (a_{m1} \circ x_1 + \dots + a_{mn} \circ x_n) \\
&\subseteq b_1 \circ (a_{11} \circ x_1) + \dots + b_1 \circ (a_{1n} \circ x_n) + \dots \\
&\quad + b_m \circ (a_{m1} \circ x_1) + \dots + b_m \circ (a_{mn} \circ x_n) \\
&= (b_1 a_{11}) \circ x_1 + \dots + (b_1 a_{1n}) \circ x_n + \dots + (b_m a_{m1}) \circ x_1 \\
&\quad + \dots + (b_m a_{mn}) \circ x_n \\
&= (b_1 a_{11} + \dots + b_m a_{m1}) \circ x_1 + \dots + (b_1 a_{1n} + \dots + b_m a_{mn}) \circ x_n \\
&\subseteq SP(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Karena $x \in SP(x_1, \dots, x_n)$ untuk sebarang $x \in V$, maka

$$SP(x_1, \dots, x_n) = V.$$

Dengan demikian $\{x_1, \dots, x_n\}$ merentang V . ■

Definisi 4.2.4 Bebas Linear (Ameri & Dehghan, 2008)

Diberikan $A \subseteq S$. Himpunan S disebut bebas linear jika setiap vektor $x_1, \dots, x_n \in S$ dan $c_1, \dots, c_n \in K$, berlaku

$$\underline{0} \in c_1 \circ x_1 + \dots + c_n \circ x_n,$$

dengan syarat $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Lemma 4.2.5 Diberikan V distributif kiri kuat dan $\{x, y, z\}$ adalah himpunan bebas linear dalam V . Maka $\{x + y, y + z, x + z\}$ juga merupakan himpunan bebas linear dalam V .

Bukti

Diberikan $\{x, y, z\}$ dalam V . Artinya, jika

$$\underline{0} \in a_1 \circ x + a_2 \circ y + a_3 \circ z,$$

maka $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $\{x + y, y + z, x + z\}$ bebas linear. Misalkan

$$\underline{0} \in a_1 \circ (x + y) + a_2 \circ (y + z) + a_3 \circ (x + z),$$

untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in K$. Maka

$$\begin{aligned} \underline{0} &\in a_1 \circ x + a_1 \circ y + a_2 \circ y + a_2 \circ z + a_3 \circ x + a_3 \circ z \\ &= (a_1 + a_3) \circ x + (a_1 + a_2) \circ y + (a_2 + a_3) \circ z. \end{aligned}$$

karena $\{x, y, z\}$ adalah himpunan bebas linear, maka

$$a_1 + a_3 = 0, a_1 + a_2 = 0, a_2 + a_3 = 0,$$

selesaikan sistem persamaan

dari $a_1 + a_3 = 0$, diperoleh $a_3 = -a_1$.

Substitusi $a_3 = -a_1$ ke $a_2 + a_3 = 0$.

$$a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = a_1.$$

Substitusi $a_2 = a_1$ ke $a_1 + a_2 = 0$.

$$a_1 + a_1 = 0 \Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Karena $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, maka $\{x + y, y + z, x + z\}$ memenuhi definisi bebas linear. Dengan demikian, $\{x + y, y + z, x + z\}$ adalah himpunan bebas linear. ■

Teorema 4.2.6 Misalkan V distributif kiri kuat dan x, y adalah vektor bebas linear dalam V . Jika $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$, dengan $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$, dan $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$, maka untuk setiap $t_1 \in a_1 \circ x, t_2 \in a_2 \circ y, s_1 \in b_1 \circ x$ dan $s_2 \in b_2 \circ y$, vektor-vektor $t_1 + t_2$ dan $s_1 + s_2$ adalah bebas linear dalam V .

Bukti

Misalkan

$$\underline{0} \in c \circ (t_1 + t_2) + (s_1 + s_2),$$

dengan $c, d \in K, t_1 \in a_1 \circ x, t_2 \in a_2 \circ y, s_1 \in b_1 \circ x$ dan $s_2 \in b_2 \circ y$.

Akan ditunjukkan bahwa $t_1 + t_2$ dan $s_1 + s_2$ adalah bebas linear.

$$\underline{0} \in c \circ (t_1 + t_2) + (s_1 + s_2),$$

$$\begin{aligned} \underline{0} &\in c \circ (a_1 \circ x + a_2 \circ y) + d \circ (b_1 \circ x + b_2 \circ y) \subseteq \\ &c \circ (a_1 \circ x) + c \circ (a_2 \circ y) + d \circ (b_1 \circ x) + d \circ (b_2 \circ y) \\ &= (ca_1) \circ x + (ca_2) \circ y + (db_1) \circ x + (db_2) \circ y \\ &= (ca_1 + db_1) \circ x + (ca_2 + db_2) \circ y. \end{aligned}$$

Karena $\{x, y\}$ adalah himpunan bebas linear, maka

$$ca_1 + db_1 = 0 \quad (1)$$

$$ca_2 + db_2 = 0 \quad (2)$$

dari persamaan (1)

$$d = -\frac{ca_1}{b_1}, \quad (\text{karena } b_1 \neq 0)$$

substitusi $d = -\frac{ca_1}{b_1}$ ke persamaan (2)

$$\begin{aligned} ca_2 - \frac{ca_1 b_2}{b_1} &= c \left(a_2 - \frac{a_1 b_2}{b_1} \right) = c \left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{b_1} \right) \\ &= c \left(\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{b_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $c = 0$. Substitusi ke persamaan (1)

$$ca_1 + db_1 = 0 \Rightarrow d = 0$$

Karena $c = 0$ dan $d = 0$ maka terbukti $t_1 + t_2$ dan $s_1 + s_2$ adalah bebas linear. ■

Teorema 4.2.7 Jika V distributif kiri kuat, maka untuk setiap himpunan $S \subseteq V$ dengan $0 \in S$, himpunan S adalah tidak bebas linear.

Bukti

Misalkan $S = \{\underline{0}, x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$, dengan $\underline{0} \in S$.

Akan ditunjukkan S tidak bebas linear.

Berdasarkan definisi bebas linear, suatu himpunan S bebas linear jika

$$\underline{0} \in c_0 \circ \underline{0} + c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \dots + c_n \circ x_n.$$

hanya berlaku jika $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

diketahui terdapat $c_0 = 1$ dan $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ memenuhi

$$\underline{0} \in 1 \circ \underline{0} + 0 \circ x_1 + 0 \circ x_2 + \dots + 0 \circ x_n.$$

Karena terdapat $c_0 = 1 \neq 0$. Maka terbukti bahwa S tidak bebas linear. ■

4.3. K -Invertible atau K -Invertible Lemah

Pada bagian ini akan dijelaskan konsep K -Invertible atau K -Invertible Lemah

Definisi 4.3.1 (Ameri & Dehghan, 2008)

- Ruang hipervektor V atas lapangan K dikatakan K -Invertible lemah $(\forall a \in K), (\forall u, v \in V)$ jika $u \in a \circ v$ maka $v \in a' \circ u$, untuk setiap $a' \in K$.
- Ruang hipervektor V atas lapangan K dikatakan K -Invertible jika dan hanya jika $(\forall a \neq 0 \in K), (\forall u, v \in V)$ jika $u \in a \circ v$, maka $v \in a^{-1} \circ u$.

Teorema 4.3.2 Misalkan V ruang hipervektor Invertible lemah dan $\{x_1, x_2, y_1, y_2\} \subseteq V$, sedemikian sehingga $x_1 \in b_1 \circ y_1$ dan $x_2 \in b_2 \circ y_2$, untuk setiap $b_1, b_2 \in K$. Berlaku, $SP(x_1, x_2) = SP(y_1, y_2)$.

Bukti

Ambil sebarang

$x_1, x_2 \in V$ dengan $x_1 \in b_1 \circ y_1$ dan $x_2 \in b_2 \circ y_2$, untuk setiap $b_1, b_2 \in K$.

$y_1, y_2 \in V$ dengan $y_1 \in b'_1 \circ x_1$ dan $y_2 \in b'_2 \circ x_2$, untuk setiap $b'_1, b'_2 \in K$.

Akan ditunjukkan $SP(x_1, x_2) = SP(y_1, y_2)$.

Misalkan $z \in SP(x_1, x_2)$ sehingga

$$z \in a_1 \circ x_1 + a_2 \circ x_2 \tag{1}$$

Untuk setiap $a_1, a_2 \in K$, substitusi x_1 dan x_2 ke persamaan (1) diperoleh

$$\begin{aligned} z &\in a_1 \circ (b_1 \circ y_1) + a_2 \circ (b_2 \circ y_2) \\ &= (a_1 b_1) \circ y_1 + (a_2 b_2) \circ y_2 \\ &\subseteq SP(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Maka $SP(x_1, x_2) \subseteq SP(y_1, y_2)$.

Sebaliknya, misalkan $w \in SP(y_1, y_2)$, sehingga

$$w \in c_1 \circ y_1 + c_2 \circ y_2 \tag{2}$$

Untuk setiap $c_1, c_2 \in K$, substitusi y_1 dan y_2 ke persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} w &\in c_1 \circ (b'_1 \circ x_1) + c_2 \circ (b'_2 \circ x_2) \\ &= (c_1 b'_1) \circ x_1 + (c_2 b'_2) \circ x_2 \\ &\subseteq SP(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Maka $SP(y_1, y_2) \subseteq SP(x_1, x_2)$.

Karena $SP(x_1, x_2) \subseteq SP(y_1, y_2)$ dan $SP(y_1, y_2) \subseteq SP(x_1, x_2)$, maka $SP(x_1, x_2) = SP(y_1, y_2)$. ■

Teorema 4.3.3 V bersifat invertible. Maka untuk setiap $v_1, \dots, v_n \in V$, berlaku salah satu dari dua kemungkinan berikut

- Himpunan $(v_1, \dots, v_n)$ adalah bebas linear,
- Terdapat suatu elemen v_j dengan $1 \leq j \leq n$ sehingga v_j dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari elemen lainnya.

Bukti

Asumsikan $v_1, \dots, v_n$ tidak bebas linear. Maka

$$\underline{0} \in c_1 \circ v_1 + \dots + c_n \circ v_n.$$

untuk beberapa $c_1, \dots, c_n$ dengan setidaknya satu $c_j \neq 0$. Selanjutnya misalkan $t_i = c_i \circ v_i$ diperoleh

$$\underline{0} \in t_1 + \dots + t_n.$$

sehingga, untuk suatu j :

$$t_j = -(t_1 + \dots + t_{j-1} + t_{j+1} + \dots + t_n).$$

karena V bersifat invertible, maka

$$v_j \in c_j^{-1} \circ t_j.$$

substitusi t_j :

$$\begin{aligned} v_j &\in c_j^{-1} \circ (-t_1 - \dots - t_{j-1} - t_{j+1} - \dots - t_n) \\ &\subseteq c_j^{-1} \circ (-t_1) + \dots + c_j^{-1} \circ (-t_{j-1}) + \\ &\quad + c_j^{-1} \circ (-t_{j+1}) + \dots + c_j^{-1} \circ (-t_n) \\ &= -c_j^{-1} \circ t_1 - \dots - c_j^{-1} \circ t_{j-1} - c_j^{-1} \circ t_{j+1} - \dots - c_j^{-1} \circ t_n \\ &\subseteq -c_j^{-1} \circ (c_1 \circ v_1) - \dots - c_j^{-1} \circ (c_{j-1} \circ v_{j-1}) - \\ &\quad - c_j^{-1} \circ (c_{j+1} \circ v_{j+1}) - \dots - c_j^{-1} \circ (c_n \circ v_n) \\ &= (-c_j^{-1} c_1) \circ v_1 + \dots + (-c_j^{-1} c_{j-1}) \circ v_{j-1} + \\ &\quad + (-c_j^{-1} c_{j+1}) \circ v_{j+1} + \dots + (-c_j^{-1} c_n) \circ v_n, \end{aligned}$$

Maka v_j adalah kombinasi linear dari $v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n$. ■

Lemma 4.3.4 Diberikan V distributif kiri kuat dan invertible. Jika W subhiperruang dari V yang direntang oleh $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan β tidak bebas linear. Maka terdapat himpunan bagian dari β yang bebas linear dan merentang W .

Bukti

Diketahui

$$W = \text{span}(\beta) \text{ dengan } \beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ \beta \text{ tidak bebas linear}$$

Akan ditunjukkan

$$\exists \beta' \subseteq \beta \text{ yang bebas linear dan } \text{span}(\beta') = W.$$

Karena β tidak bebas linear, maka terdapat subhimpunan yang bebas linear

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq \beta.$$

jika $k = n$, maka terbukti,

jika $k < n$, pilih $v_j \in \beta \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ yang merupakan kombinasi linear dari elemen lain:

$$v_j \in b_1 \circ v_1 + \dots + b_{j-1} \circ v_{j-1} + b_{j+1} \circ v_{j+1} + \dots + b_n \circ v_n.$$

hapus v_j dari β , sehingga terbentuk himpunan baru

$$\beta' = \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\},$$

memiliki $n - 1$ elemen dan tetap merentang W . Karena jika

$$v \in \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_i \circ v_i,$$

dan karena $0 \in 0 \circ v_j$, maka $v \in W$. Namun, akan ditunjukkan bahwa

$$\text{span}(\beta') = W.$$

Misalkan untuk setiap $w \in W$, terdapat $a_1, a_2, \dots, a_n$ dalam K sedemikian sehingga $w \in \sum_{i=1}^n a_i \circ v_i$.

Substitusi v_j diperoleh

$$\begin{aligned} w &\in a_1 \circ v_1 + \dots + a_j \circ (b_1 \circ v_1 + \dots + b_{j-1} \circ v_{j-1} + \\ &\quad + b_{j+1} \circ v_{j+1} + \dots + b_n \circ v_n) + \dots + a_n \circ v_n \\ &= a_1 \circ v_1 + \dots + a_j b_1 \circ v_1 + \dots + a_j b_{j-1} \circ v_{j-1} + \\ &\quad + a_j b_{j+1} \circ v_{j+1} + \dots + a_j b_n \circ v_n + \dots + a_n \circ v_n \\ &= (a_1 + a_j b_1) \circ v_1 + \dots + (a_{j-1} + a_j b_{j-1}) \circ v_{j-1} + \\ &\quad + (a_{j+1} + a_j b_{j+1}) \circ v_{j+1} + \dots + (a_n + a_j b_n) \circ v_n, \end{aligned}$$

Artinya, w dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n$ sehingga $\text{span}(\beta') = W$.

Dengan mengulangi proses ini, akan diperoleh himpunan bagian $(v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ yang merentang W tetapi tidak memiliki elemen yang merupakan kombinasi linier dari yang lain. Berdasarkan **Teorema 4.3.3** elemen-elemen $v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ haruslah bebas linear. ■

4.4. Basis dan Dimensi Pada Ruang Hipervektor

Pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep basis dan dimensi pada ruang hipervektor.

Definisi 4.4.1 (Ameri & Dehghan, 2008) Diberikan himpunan $B \subseteq V$, B disebut basis untuk V jika

- B bebas linear
- B merentang V , yaitu $SP(B) = V$.

V disebut berdimensi hingga jika V memiliki basis berhingga. Jika V memiliki basis n vektor, maka setiap basis untuk V memiliki n vektor dan n disebut dimensi dari V , ditulis $\dim V = n$.

Teorema 4.4.2 jika V ruang hipervektor yang berdistributif kuat, maka untuk setiap himpunan bagian bebas linear $\{x_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dari V , himpunan

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \right\}$$

disebut basis untuk ruang hipervektor $(M_{m \times n}^V, \oplus, \odot, \mathbb{R})$ dan $\dim M_{m \times n}^V = mn$.

Bukti

Untuk menunjukkan S merupakan basis untuk ruang hipervektor $(M_{m \times n}^V, \oplus, \odot, \mathbb{R})$ dan $\dim M_{m \times n}^V = mn$. Maka harus ditunjukkan bahwa S merentang $M_{m \times n}^V$ dan S bebas linear.

- S merentang $M_{m \times n}^V$

Misalkan $\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1m} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}^V$. Akan ditunjukkan S merentang $M_{m \times n}^V$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\in 1 \odot \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix} + \dots + 1 \odot \begin{bmatrix} \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Karena $\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1m} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear. Maka S merentang $M_{m \times n}^V$.

- S bebas linear

Misalkan $\begin{bmatrix} \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}^V$. Akan ditunjukkan S bebas linear.

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix} \in a_{11} \circ \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix} + \dots + a_{12} \circ \begin{bmatrix} \underline{0}x_{12} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$+ \dots + a_{mn} \circ \begin{bmatrix} \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

untuk setiap $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in K$. Selanjutnya

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} x_{11}^{11} & \cdots & x_{1n}^{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1}^{11} & \cdots & x_{mn}^{11} \end{bmatrix} : x_{11}^{11} \in a_{11} \circ x_{11}, x_{ij}^{11} \in a_{11} \circ \underline{0}, ij \neq 11 \right\}$$

$$+ \dots + \left\{ \begin{bmatrix} x_{11}^{mn} & \cdots & x_{1n}^{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1}^{mn} & \cdots & x_{mn}^{mn} \end{bmatrix} : x_{mn}^{mn} \in a_{mn} \circ x_{mn}, x_{ij}^{mn} \in a_{mn} \circ \underline{0}, ij \neq mn \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{mn} x_{11}^i & \cdots & \sum_{i=1}^{mn} x_{1n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{mn} x_{m1}^i & \cdots & \sum_{i=1}^{mn} x_{mn}^i \end{bmatrix} : x_{ij}^{rs} \in \begin{cases} a_{ij} \circ x_{ij} & rs = ij \\ a_{ij} \circ \underline{0} & rs \neq ij \end{cases} \right\}.$$

Jadi,

$$\underline{0} \in \sum_{i=1}^{mn} x_{11}^i, \dots, \underline{0} \in \sum_{i=1}^{mn} x_{1n}^i, \dots, \underline{0} \in \sum_{i=1}^{mn} x_{m1}^i, \dots, \underline{0} \in \sum_{i=1}^{mn} x_{mn}^i.$$

Sehingga,

$$\begin{cases} \underline{0} \in a_{11} \circ x_{11} + \sum_{i=1}^{mn} a_i \circ \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \in a_{11} \circ x_{11} \\ \underline{0} \in a_{12} \circ x_{12} + \sum_{i=1}^{mn} a_i \circ \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \in a_{12} \circ x_{12} \\ \vdots \\ \underline{0} \in \sum_{i=1}^{mn} a_i \circ \underline{0} + a_{mn} \circ x_{mn} \Rightarrow \underline{0} \in a_{mn} \circ x_{mn} \end{cases}$$

Akibatnya,

$$\underline{0} \in a_{11} \circ x_{11} + a_{12} \circ x_{12} + \cdots + a_{mn} \circ x_{mn}$$

maka diperoleh

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{mn} = 0.$$

Oleh karena S merentang dan bebas linear. Dengan demikian, S membentuk sebuah basis untuk ruang hipervektor $M_{m \times n}^V$. ■

Teorema 4.4.3 Diberikan V anti-distributif kiri. Himpunan $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ merupakan basis untuk V jika dan hanya jika untuk setiap $x \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $c_1 \circ x_1 + \cdots + c_n \circ x_n$, untuk $c_i \in K$.

Bukti

$\Rightarrow$ Berdasarkan definisi merentang, setiap elemen merentang dapat dinyatakan dalam bentuk $c_1 \circ x_1 + \cdots + c_n \circ x_n$. Untuk membuktikan bahwa $x \in V$ dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linear dengan skalar yang unik, harus ditunjukkan bahwa jika terdapat $x \in V$ sedemikian sehingga

$$x \in c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \cdots + c_n \circ x_n,$$

dan

$$x \in d_1 \circ x_1 + d_2 \circ x_2 + \cdots + d_n \circ x_n,$$

maka $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_n = d_n$. Karena x sama, maka

$$\begin{aligned} \underline{0} &= x - x \\ &\in c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \cdots + c_n \circ x_n - \\ &\quad (d_1 \circ x_1 + d_2 \circ x_2 + \cdots + d_n \circ x_n) \\ &= c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \cdots + c_n \circ x_n - \\ &\quad (d_1 \circ x_1) - (d_2 \circ x_2) - \cdots - (d_n \circ x_n) \\ &= c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \cdots + c_n \circ x_n + \\ &\quad (-d_1) \circ x_1 + (-d_2) \circ x_2 + \cdots + (-d_n) \circ x_n. \end{aligned}$$

Karena V anti-distributif kiri, maka diperoleh

$$\underline{0} \in (c_1 - d_1) \circ x_1 + \cdots + (c_n - d_n) \circ x_n,$$

karena $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah himpunan bebas linear maka harus berlaku

$$c_1 - d_1 = 0, c_2 - d_2 = 0, \dots, c_n - d_n = 0.$$

Dari sini diperoleh

$$c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n.$$

Dengan demikian kombinasi linear terbukti.

$\Leftarrow$ Misalkan setiap elemen $x \in V$ dapat dinyatakan sebagai

$$x = c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \cdots + c_n \circ x_n, \quad c_i \in K$$

Akan ditunjukkan bahwa β adalah basis

1. β merentang V

Berdasarkan asumsi, setiap $x \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari β sehingga β merentang V

2. β bebas linear

Misalkan

$$\underline{0} \in a_1 \circ x_1 + \cdots + a_n \circ x_n,$$

untuk setiap $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$. Berdasarkan **Lemma 4.1.2** diperoleh

$$0 \circ x_i = 0 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Sehingga $\underline{0} \in 0 \circ x_i, 1 \leq i \leq n$. Akibatnya, dapat dibentuk

$$\underline{0} \in 0 \circ x_1 + \cdots + 0 \circ x_n,$$

kombinasi linear yang bernilai nol hanya terjadi jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

Dengan demikian β bebas linear.

Karena β bebas linear dan merentangkan V maka terbukti bahwa β adalah basis. ■

Teorema 4.4.4 Jika $(V, +, \circ, \mathbb{R})$ ruang hipervektor dengan distributif kiri kuat atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $\{x, y, z\}$ adalah basis untuk V , maka himpunan $\{x + y, y + z, x + z\}$ juga merupakan basis untuk V .

Bukti

Berdasarkan **Lemma 4.2.5** himpunan $\{x + y, y + z, x + z\}$ bebas linear. Selanjutnya, misalkan $w \in V$. Maka terdapat $a, b, c \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$w \in a \circ x + b \circ y + c \circ z.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa w dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $x + y, y + z$, dan $x + z$. Misalkan

$$\begin{aligned} w &= a' \circ (x + y) + b' \circ (y + z) + c' \circ (x + z) \\ &= a' \circ x + a' \circ y + b' \circ y + b' \circ z + c' \circ x + c' \circ z \\ &= (a' + c') \circ x + (a' + b') \circ y + (b' + c') \circ z \end{aligned}$$

Samakan koefisien x, y dan z dengan yang ada dalam $w = a \circ x + b \circ y + c \circ z$. Dengan demikian, diperoleh

$$a' + c' = a, a' + b' = b, b' + c' = c.$$

Selanjutnya dapat menyelesaikan sistem ini untuk a', b' dan c' .

Dari $a' + b' = b$, didapatkan $b' = b - a'$,

substitusi $b' = b - a'$ ke dalam $b' + c' = c$, diperoleh

$$(b - a') + c' = c \Rightarrow c' = c - b + a',$$

substitusi $c' = c - b + a'$ ke dalam $a' + c' = a$ diperoleh

$$a' + c - b + a' = a \Rightarrow 2a' = a - c + b \Rightarrow a' = \frac{a - c + b}{2},$$

dari $b' = b - a'$ substitusi nilai a' diperoleh

$$b' = b - \frac{a - c + b}{2} = \frac{2b - (a - c + b)}{2} = \frac{c - a + b}{2}$$

dari $c' = c - b + a'$, substitusi nilai a' didapatkan

$$c' = c - b + \frac{a - c + b}{2} = \frac{2c - 2b + (a - c + b)}{2} = \frac{a + c - b}{2},$$

diperoleh

$$a' = \frac{a - b + c}{2}, b' = \frac{c - a + b}{2}, c' = \frac{a + c - b}{2}.$$

Maka $\{x + y, y + z, x + z\}$ merentangkan V .

Dengan demikian, terbukti bahwa jika $\{x, y, z\}$ adalah basis untuk V , maka $\{x + y, y + z, x + z\}$ adalah basis untuk V . ■

Teorema 4.4.5 Diberikan V ruang hipervektor yang Invertible dan H subhiperruang dalam V dengan basis β . Maka $\beta \cup \{y\}$ bebas linear, untuk setiap $y \in V \setminus H$, sedemikian sehingga $0 \circ y = \{\underline{0}\}$.

Bukti

Asumsikan

$$\beta = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ dan } \beta \cup \{y\} \text{ tidak bebas linear.}$$

Jika

$$\underline{0} \in a'_1 \circ x_1 + \cdots + a'_n \circ x_n + b \circ y,$$

untuk setiap $a'_1, \dots, a'_n, b \in K$, dengan setidaknya salah satu skalarnya tidak nol. Maka $\underline{0} = t_1 + \cdots + t_n + c$,

untuk setiap $t_n \in a'_n \circ x_n, c \in b \circ y$.

Jika $b \neq 0$, maka $y \in b^{-1} \circ c$ diperoleh

$$\begin{aligned} y \in b^{-1} \circ (-t_1 - \dots - t_n) &\subseteq b^{-1} \circ (-t_1) + \dots + b^{-1} \circ (-t_n) \\ &\subseteq b^{-1} \circ (-a'_1 \circ x_1) + \dots + b^{-1} \circ (-a'_n \circ x_n) \\ &= (-b^{-1}a'_1) \circ x_1 + \dots + (-b^{-1}a'_n) \circ x_n \subseteq H \end{aligned}$$

Karena $y \in H$ maka terjadi kontradiksi dengan pernyataan awal $y \in V \setminus H$.

Jika $b = 0$, maka

$$0 \in a'_1 \circ x_1 + \dots + a'_n \circ x_n + 0 \circ y,$$

Karena β adalah basis (bebas linear), hanya mungkin jika $a'_1 = a'_2 = \dots = a'_n = 0$, yang berarti kontradiksi dengan asumsi awal bahwa setidaknya salah satu skalarnya tidak nol.

Jadi, karena asumsi bahwa $b \neq 0$ dan $b = 0$ mengarah pada kontradiksi maka dengan demikian. $\beta \cup \{y\}$ bebas linear. ■

Teorema 4.4.6 Diberikan V distributif kiri kuat dan Invertible. Jika V memiliki basis berhingga dengan n elemen, maka setiap himpunan bagian yang bebas linear dari V tidak memiliki lebih dari n elemen.

Bukti

Misalkan

$\{v_1, \dots, v_n\}$ adalah basis dari V

$\{w_1, \dots, w_m\}$ adalah himpunan bebas linear dalam V

Akan ditunjukkan bahwa $m \leq n$.

Karena $\{v_1, \dots, v_n\}$ adalah basis di V , maka w_m dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $v_1, \dots, v_n$, yaitu

$$w_m = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n. \quad c_i \in K.$$

Maka, himpunan $\{w_m, v_1, \dots, v_n\}$ tidak bebas linear. Selain itu, $\{v_1, \dots, v_n\}$ adalah basis dari V dan $w_m \in V$ maka $\{w_m, v_1, \dots, v_n\}$ merentang V dan $0 \in 0 \circ w_m$. Berdasarkan **Lemma 4.3.4**, terdapat himpunan bagian

$$\{w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\} \subseteq \{w_m, v_1, \dots, v_n\}$$

dengan $r \leq n - 1$ yang membentuk basis untuk V . Himpunan ini mengganti setidaknya satu dari v_i dengan w_m . Selanjutnya, ulangi proses ini dengan himpunan $\{w_{m-1}, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$. Dari himpunan tidak bebas linear ini, menggunakan **Lemma 4.3.4** lagi dapat diperoleh basis dalam bentuk

$$\{w_{m-1}, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$$

dengan $s \leq n - 2$. Dengan proses ini dilanjutkan diperoleh basis dari V dalam bentuk

$$\{w_2, \dots, w_{m-1}, w_m, v_\alpha, v_\beta, \dots\}.$$

Karena w_1 tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $w_2, \dots, w_{m-1}$, maka basis ini harus memuat setidaknya satu v_i . Untuk mencapai basis ini, dimasukkan $m - 1$ elemen w , dan setiap kali memasukkan w harus menghilangkan setidaknya satu v . Namun masih ada setidaknya satu v yang tersisa. Dengan demikian diperoleh:

$$m - 1 \leq n - 1,$$

sehingga

$$m \leq n$$

Maka, terbukti bahwa setiap himpunan bebas linear dalam V memiliki paling banyak n elemen. ■

Teorema 4.4.7 Diberikan V distributif kiri kuat dan Invertible sedemikian sehingga $\dim V = n$ dan $0 \circ y = \{0\}$, untuk setiap $y \in V$. Maka setiap himpunan $S \subseteq V$ yang bebas linear dengan n vektor adalah basis untuk V .

Bukti

Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $H = SP(S)$. Asumsikan jika $H \neq V$, maka terdapat $y \in V \setminus H$ sehingga $y \notin SP(S)$. Berdasarkan **Teorema 4.4.5** jika $y \in V \setminus H$, maka himpunan $S \cup \{y\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ bebas linear. Ini berarti $S \cup \{y\}$ adalah himpunan bebas linear dengan $n + 1$ elemen karena penambahan satu elemen baru y ke dalam S . Terjadi kontradiksi dengan **Teorema 4.4.6** yang menyatakan setiap himpunan bagian yang bebas linear dari V tidak memiliki lebih dari n elemen. Oleh karena itu, asumsi $H \neq V$ salah, sehingga $H = V$ yang artinya $SP(S) = V$. Karena S bebas linear dan merentang V , maka S adalah basis untuk V . ■

Teorema 4.4.8 Misalkan X himpunan berhingga yang merentang V . Maka $X \cup \{y\}$ tidak bebas linear, untuk setiap $y \in V \setminus X$.

Bukti

Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $y \in V \setminus X$. Karena X merentang V maka dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

$$y \in a_1 \circ x_1 + a_2 \circ x_2 + \dots + a_n \circ x_n.$$

untuk setiap $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$

$$y = t_1 + t_2 + \dots + t_n,$$

dengan $t_i \in a_i \circ x_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Jadi

$$0 = y - t_1 - t_2 - \dots - t_n \in 1 \circ y - a_1 \circ x_1 - \dots - a_n \circ x_n.$$

Karena $y \in V \setminus X$ maka $X \cup \{y\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ dapat dinyatakan dalam kombinasi linear

$$c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \dots + c_n \circ x_n + c \circ y = 0,$$

dengan $c_1, c_2, \dots, c_n, c \in K$. Substitusi nilai y persamaan diperoleh

$$c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \dots + c_n \circ x_n + c \circ (t_1 + t_2 + \dots + t_n),$$

$$c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \dots + c_n \circ x_n +$$

$$c \circ (a_1 \circ x_1 + a_2 \circ x_2 + \dots + a_n \circ x_n),$$

dengan menggunakan sifat distributif kanan (H_2) diperoleh

$$c_1 \circ x_1 + c_2 \circ x_2 + \dots + c_n \circ x_n +$$

$$(ca_1) \circ x_1 + (ca_2) \circ x_2 + \dots + (ca_n) \circ x_n = 0$$

$$(c_1 + ca_1) \circ x_1 + (c_2 + ca_2) \circ x_2 + \dots + (c_n + ca_n) \circ x_n = 0$$

diperoleh

$$c_1 + ca_1 = 0, c_2 + ca_2 = 0, c_n + ca_n = 0.$$

Sistem persamaan ini memiliki dua kemungkinan

1. Jika $c = 0$, maka $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ sehingga X bebas linear
2. Jika $c \neq 0$, maka terdapat solusi $c_1, c_2, \dots, c_n$ tidak semuanya nol. Ini menunjukkan bahwa $X \cup \{y\}$ tidak bebas linear

Dalam hal ini karena $c \neq 0$ adalah mungkin, maka terbukti bahwa $X \cup \{y\}$ tidak bebas linear atau dengan kata lain $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ tidak bebas linear. ■

Teorema 4.4.9 Diberikan V Invertible dan $0 \circ y = \{0\}$, untuk setiap $y \in V$. Jika himpunan $\{x_1, \dots, x_n\}$ bebas linear dalam V , sedemikian sehingga $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m\}$ tidak bebas linear, untuk setiap $m > n$, maka $\{x_1, \dots, x_n\}$ adalah basis untuk V .

Bukti

Misalkan $H = SP(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Akan ditunjukkan $\{x_1, \dots, x_n\}$ adalah basis untuk V . Asumsikan $V \neq H$. Artinya terdapat $y \in V \setminus H$ sedemikian sehingga berdasarkan **Teorema 4.4.5**, jika $y \notin H$ maka himpunan $\{x_1, \dots, x_n, y\}$ adalah bebas linear dengan kata lain penambahan y ke himpunan $\{x_1, \dots, x_n\}$ tidak membuat himpunan tersebut menjadi tidak bebas linear. Namun, menurut asumsi teorema yang menyatakan bahwa himpunan $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m\}$ dengan $m > n$ adalah tidak bebas linear. Hal ini membuat kontradiksi sehingga $V \neq H$ salah. Maka $V = H$. Artinya, $\{x_1, \dots, x_n\}$ adalah basis untuk V . ■

Teorema 4.4.10 Misalkan W_1 dan W_2 subhiperruang dari V yang bersifat distributif kiri kuat dan Invertible dengan $W_1 \subseteq W_2$ dan $\dim W_1 = \dim W_2$. Maka $W_1 = W_2$.

Misalkan $\{x_1, \dots, x_n\}$ adalah basis untuk W_1 . Akan ditunjukkan $W_1 = W_2$. Karena $\{x_1, \dots, x_n\}$ adalah basis untuk W_1 , sehingga $\dim W_1 = n$. Asumsikan $W_1 \neq W_2$, artinya terdapat $y \in W_2 \setminus W_1$, ditambahkan y ke himpunan $\{x_1, \dots, x_n\}$ karena $y \notin W_1$ sedemikian sehingga berdasarkan **Teorema 4.4.5**, himpunan $\{x_1, \dots, x_n, y\}$ adalah bebas linear dalam W_2 dengan $n + 1$ vektor. Namun, hal ini kontradiksi dengan **Teorema 4.4.6** yang menyatakan bahwa dimensi $W_2 = n$, sehingga W_2 tidak memiliki himpunan bebas linear dengan lebih dari n vektor. Oleh karena itu asumsi $W_1 \neq W_2$ salah, maka terbukti bahwa $W_1 = W_2$. ■

Teorema 4.4.11 Diberikan V distributif kiri kuat dan Invertible dan $\{x_1, \dots, x_n\}$ bebas linear dalam V . Jika $x \in V$ sedemikian sehingga $0 \circ x = \{0\}$ dan $x \notin SP(x_1, \dots, x_n)$, maka $\{x_1 + x, \dots, x_n + x\}$ himpunan bebas linear dalam V .

Bukti

Misalkan

$$0 \in a_1 \circ (x_1 + x) + \dots + a_n \circ (x_n + x),$$

untuk setiap $a_1, \dots, a_n \in K$.

$$0 \in a_1 \circ x_1 + \dots + a_n \circ x_n + (a_1 + \dots + a_n) \circ x.$$

Jadi,

$$0 = t_1 + \dots + t_n + b,$$

untuk setiap $t_i \in a_i \circ x_i, 1 \leq i \leq n, b \in (a_1 + \dots + a_n) \circ x$. Selanjutnya

jika $a_1 + \dots + a_n \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} x &\in (a_1 + \dots + a_n)^{-1} \circ b = (a_1 + \dots + a_n)^{-1} \circ (-t_1 - \dots - t_n) \\ &\subseteq (a_1 + \dots + a_n)^{-1} \circ (-a_1 \circ x_1 - \dots - a_n \circ x_n) \\ &\subseteq (-a_1(a_1 + \dots + a_n)^{-1}) \circ x_1 + \dots + (-a_n(a_1 + \dots + a_n)^{-1}) \circ x_n \\ &\subseteq SP(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan pernyataan awal yang menyatakan $x \notin SP(x_1, \dots, x_n)$.

Jika $a_1 + \dots + a_n = 0$ dan $a_i \neq 0$, untuk setiap $1 \leq j \leq n$, maka

$$\begin{aligned} 0 &\in a_1 \circ x_1 + \dots + a_j \circ x_j + \dots + a_n \circ x_n + 0 \circ x. \\ &= a_1 \circ x_1 + \dots + a_j \circ x_j + \dots + a_n \circ x_n. \end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi. Dengan demikian $a_1 + \dots + a_n = 0$ dan $a_i = 0$ untuk semua $1 \leq i \leq n$. Oleh karena itu, himpunan $\{x_1 + x, \dots, x_n + x\}$ adalah bebas linear dalam V . ■

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa konsep basis dan dimensi dalam ruang hipervektor lebih kompleks dibandingkan ruang vektor klasik karena adanya hiperoperasi. Dalam ruang hipervektor basis tetap didefinisikan sebagai himpunan vektor yang bebas linear dan merentangkan seluruh ruang hipervektor, namun dengan penambahan sifat distributif kiri kuat dan invertible. Sifat ini memastikan bahwa setiap himpunan bebas linear memiliki maksimal n elemen, dengan n adalah dimensi dari ruang hipervektor tersebut. Penambahan vektor dari luar basis akan mengakibatkan tidak bebas linear.

References

- [1] Ameri, R. (2005). *Fuzzy hypervector spaces over valued fields*. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2(1), 37-47
- [2] Ameri, R., & Dehghan, O. R. (2008). *On dimension of hypervector spaces*. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(2), 32-50.
- [3] Anton, H. (2010). *Elementary Linear Algebra*. Britania Raya: Wiley.
- [4] Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.
- [5] Davvaz, B., & Leoreanu-Fotea, V. (2007). *Hyperring theory and applications*. International Academic Press.
- [6] Davvas, B. (2013). *Polygroup and Related System*. New Jersey: World Scientific.
- [7] Dehghan, O. R., Ameri, R., & Aliabadi, H. E. (2019). *Some results on hypervector spaces*. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41, 23-41.
- [8] Gunawan, R. (2009). *Aljabar Linier Dasar*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.
- [9] Huwae, E., ddk. (2024). *Algebra Hyperstructure Concept and Its Application on Oxidation Reduction: Actinium (Ac) and Berkelium (Bk)*. *Tensor: Pure and Applied Mathematics Journal*, 5(1), 33-48.
- [10] Lulut Alfari, S. T., dkk. (2022). *Matriks dan Ruang Vektor*. Cendikia Mulia Mandiri.
- [11] Marty, F. (1934). *Sur une generalization de la notion de groups*. In *8th congress Math. Scandinaves, Stockholm*, (1934).
- [12] Muchlisah, N. (2008). *Teori Gelanggang dan Lapangan*. Surakarta: LPP UNS dan UNS PERS.
- [13] Roman, S. (2005). *Field theory* (Vol. 158). Springer Science & Business Media.
- [14] Sintiar, N. L. D., dkk. (2024). *Aljabar Linear: Teori dan Aplikasi*. CV. Gita Lentera.

- [15] Tallini, M. S. (1991). *Hypervector spaces*. In *Proceeding of the 4th International Congress in Algebraic Hyperstructures and Applications* (pp. 167-174).