

September 2025
Volume 6 Nomor 2

p-ISSN 2723-0325 e-ISSN 2723-0333



TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PATTIMURA

TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

is an international academic open-access journal that gains a foothold in mathematics, and its applications are issued twice a year. The focus is to publish original research and review articles on all aspects of pure and applied Mathematics. Editorial board members of the Journal and reviewers will review submitted papers. All submitted articles should report original, previously unpublished research results, experimental or theoretical, and will be peer-reviewed. Articles submitted to the journal should meet these criteria and must not be under consideration for publication elsewhere. Manuscripts should follow the journal template and are subject to both review and editing.

Published by:

**Department of Mathematics,
Faculty of Science and Technology,
Pattimura University.
Ambon
2025**

Copyright© Program Studi Matematika FST UNPATTI 2025

Person In Charge

Head of Undergraduate Program in Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Pattimura University

Editor in Chief

Dr. H. Batkunde, S.Si, M.Si

Editors

M. I. Tilukay, S.Si, M.Si (Managing and Section Editor)
L. Bakarbessy, S.Si, M.Si (Managing and Section Editor)
Z. A. Leleury, S.Si., M.Si (Copy and Production Editor)
B. P. Tomasouw, S.Si, M.Si (Copy and Production Editor)
Dr. L. K. Beay, S.Pd., M.Si (Proofreader)
N. Dahoklory (Proofreader)

Secretariat and Financial Officer

M. E. Rijoly, S.Si, M.Sc

Graphic Design

V. Y. I. Ilwaru, S.Si, M.Si

Expert Editorial Boards

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc (Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Indonesia)
Prof. Dr. M. Salman A. N, M.Si (Institut Teknologi Bandung, Indonesia)
Dr. H. J. Wattimanela, S.Si., M.Si (Universitas Pattimura, Indonesia)
Dr. Al Azhary Masta, S.Si., M.Si (Universitas Pendidikan Indonesia, Indonesia)
Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si (Universitas Hasanudin, Indonesia)
Dr. Meta Kallista, S.Si., M.Si (Universitas Telkom, Indonesia)
Dr. Teguh Herlambang, S.Si., M.Si (Universitas Nahdlatul Ulama Surabaya, Indonesia)
Asst. Prof. Dr. Anurak Thanyacharoen (Muban Chombueng Rajabhat University, Ratchaburi, Thailand)

Publisher

Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University, Ambon, Indonesia

Editorial Address

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon 97233, Provinsi Maluku, Indonesia
Contact : +62 82397854220
Email : tensormathematics@gmail.com

Clustering of Regencies/Cities in Maluku Province Based on Tuberculosis Cases Using the K-Medoids Algorithm	Meyriska Wattimena Marlon S. Noya Van Delsen Rosalina Salhuteru	67-74
Pemodelan Sistem Antrian Pelayanan Bpjs (Badan Penyelenggara Jaminan Sosial) Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus	Yohana L. Simbolon Francis Y. Rumlawang Novita Dahoklory Henry W. M. Patty Pranaya D. M. Taihuttu Abraham Z. Wattimena	75-86
Reduksi Noise Pada Citra Digital Menggunakan Metode Arithmetic Mean Filter	Rayhan Khalid Ciptoadi Sintia Sara Sersian Rifaldi Allu Abraham Z. Wattimena Meilin Imelda Tilukay	87-94
Model Predator – Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dengan Adanya Infeksi Pada Prey dan Pemanenan Pada Predator	Hilda Amelia Dorteus. L. Rahakbauw Z. A. Leleury	95-110
Forecasting Inflation Rate in Ternate City Using ARIMA Method and ARIMAX Calendar Variation	Riski Noviyanti Ilu Ronald John Djami Novita Serly Laamena	111-120
Aplikasi Metode Adams Bashforth Moulton Dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Kota Ambon	Fikram Radjab Francis Yunito Rumlawang	121-130

Model *Predator – Prey* Dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dengan Adanya Infeksi pada *Prey* dan Pemanenan pada *Predator*

Hilda Amelia^{1*}, Dorteus. L. Rahakbauw², Z. A. Leleury³

^{1,2,3}Jurusan Matematika FST Universitas Pattimura, Jl. Ir. M. Putuhena, Ambon, Indonesia.

Manuscript submitted : August 2025;

Accepted for publication : October 2025.

doi: <https://doi.org/10.30598/tensorvol6iss2pp95-110>

Abstract: Model matematika *predator-prey* merupakan salah satu pendekatan yang digunakan untuk memahami dinamika populasi dalam ekosistem. Penelitian ini mengembangkan model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II, di mana *prey* (mangsa) dapat terinfeksi penyakit dan *predator* mengalami pemanenan. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membentuk model matematika dari sistem tersebut, menentukan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilannya, serta melakukan simulasi guna memahami dinamika populasi. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dan pendekatan numerik dengan bantuan perangkat lunak Matlab. Model yang dikembangkan mempertimbangkan tiga sub-populasi mangsa: mangsa sehat, mangsa terinfeksi, dan mangsa yang sedang dalam proses perawatan (*treatment*). *Predator* dalam model ini mengalami pemanenan, yang berarti populasinya berkurang akibat eksploitasi manusia. Analisis kestabilan dilakukan dengan mencari titik kesetimbangan sistem serta mengevaluasi kestabilannya menggunakan matriks Jacobian dan nilai eigen. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat beberapa titik kesetimbangan dalam sistem, yaitu titik kesetimbangan trivial, semi-trivial, dan non-trivial. Titik kesetimbangan trivial terjadi ketika seluruh populasi punah. Titik kesetimbangan semi-trivial terjadi dalam beberapa skenario, seperti ketika *predator* punah, mangsa sehat tidak ada, atau mangsa terinfeksi tidak ada. Sementara itu, titik kesetimbangan non-trivial menggambarkan kondisi di mana semua populasi eksis dan berinteraksi dalam keseimbangan dinamis. Simulasi numerik menunjukkan bahwa keberadaan infeksi dan pemanenan dapat mempengaruhi kestabilan sistem dan pola interaksi *predator-prey* secara signifikan. Kesimpulan dari penelitian ini adalah bahwa faktor infeksi pada *prey* dan pemanenan pada *predator* memiliki dampak besar terhadap keseimbangan ekosistem. Pemanenan yang berlebihan dapat menyebabkan kepunahan *predator*, yang selanjutnya dapat menyebabkan ledakan populasi mangsa atau ketidakseimbangan ekosistem. Berdasarkan hasil penelitian, disarankan agar dilakukan studi lebih lanjut dengan mempertimbangkan faktor lingkungan lainnya, seperti variasi tingkat infeksi dan kebijakan pengelolaan pemanenan *predator*, untuk menjaga keseimbangan ekosistem secara lebih realistis.

Keywords: *predator-prey*, *software Matlab*, titik kesetimbangan, fungsi respon Holling tipe II, infeksi, pemanenan, kestabilan

1. Introduction

Dalam ekosistem terdapat rangkaian organisme yang saling berhubungan dalam kebiasaan makanannya yang disebut rantai makanan. Rantai makanan memiliki peran penting dalam menjaga keseimbangan ekosistem. Jika salah satu rantai makanan hilang maka dinamika ekosistem akan terganggu dan dapat berdampak pada populasi mangsa *prey* atau *Predator* (Deden, 2017).

Dalam matematika, model rantai makanan dalam ekosistem tersebut dinamakan model *Prey-Predator* yang

diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1926. Pada model ini Lotka dan Volterra mengasumsikan bahwa *predator* dan *prey* tumbuh secara eksponensial. Akan tetapi asumsi ini masih perlu disempurnakan sesuai keadaan di alam, sehingga pada tahun 1948 Leslie dan Gower melakukan modifikasi pada model Lotka-Volterra dan dikenal dengan model Leslie Gower.

Penggunaan model pertumbuhan logistik dalam model *predator-prey* ini didasari oleh konsep daya dukung lingkungan atau *carrying capacity*, yang menggambarkan jumlah maksimum populasi yang dapat dipertahankan dalam suatu ekosistem tanpa merusak keseimbangannya. Model pertumbuhan logistik umumnya digunakan untuk memprediksi bagaimana populasi mangsa (*prey*) dan *predator* berkembang dan berinteraksi seiring waktu, memperhitungkan faktor-faktor seperti ketersediaan sumber daya, laju reproduksi, dan kapasitas lingkungan untuk mendukung kehidupan kedua populasi.

Dalam ekosistem, populasi mangsa biasanya terbatas oleh ketersediaan sumber daya alam, seperti makanan dan tempat berlindung, yang secara alami akan mencapai titik jenuh sesuai dengan daya dukung lingkungannya. Ketika populasi mendekati kapasitas tersebut, laju pertumbuhan mereka cenderung melambat, mengikuti pola pertumbuhan logistik. Faktor ini penting karena pada saat populasi mangsa meningkat, *predator* pun memiliki lebih banyak sumber makanan, sehingga populasi *predator* juga cenderung meningkat.

Namun, saat populasi *predator* meningkat, intensitas pemangsaan terhadap mangsa juga bertambah, yang menyebabkan populasi mangsa menurun. Penurunan ini kemudian mempengaruhi populasi *predator*, karena berkurangnya jumlah mangsa mengurangi sumber makanan bagi *predator*. Siklus ini menciptakan dinamika fluktuatif dalam populasi kedua spesies, di mana populasi *predator* dan mangsa saling memengaruhi satu sama lain dalam suatu keseimbangan dinamis.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, Dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2 (Finizio dan Ladas, 1982:132). Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan y_1, y_2, \dots, y_n adalah variabel bebas dan x adalah variabel terikat, sehingga $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, dimana $\frac{dy_n}{dt}$ merupakan derivative fungsi y_n terhadap x , dan f_n adalah fungsi yang tergantung pada variabel y_1, y_2, \dots, y_n dan x (Claudia, 2004:702).

2.2. Titik Keseimbangan dan Kestabilan Titik kesetimbangan

Suatu sistem dinamis dikatakan berada dalam keadaan setimbang jika sistem tersebut tidak berubah sepanjang waktu atau kedua persamaan diferensial sama dengan nol. Oleh karena itu, suatu populasi dikatakan berada dalam keadaan setimbang jika jumlah populasi tersebut tidak berubah sepanjang waktu.

Kestabilan dari titik kesetimbangan (*equilibrium point*) pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui

persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di titik \bar{x} . Kriteria kestabilan titik kesetimbangan (*equilibrium point*) pada sistem $\dot{x} = f(x)$ tersebut disajikan pada teorema dibawah ini :

Teorema 2.1. (Hale, 1991)

- Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan (*equilibrium point*) \bar{x} dari sistem $\dot{x} = f(x)$ stabil asimtotik.
- Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik kesetimbangan (*equilibrium point*) \bar{x} dari sistem $\dot{x} = f(x)$ tidak stabil.

2.3. Model Mangsa - Pemangsa

Ilustrasi kijang dan macan tutul dapat dimodelkan ke dalam bentuk model matematika. Banyaknya mangsa (x untuk kijang) pada saat t yang dapat di notasikan pada $x(t)$ dan $y(t)$ adalah banyaknya pemangsa (y untuk macan tutul) pada saat t . Misalkan tidak ada macan tutul, maka yang akan terjadi adalah kehidupan kijang akan tumbuh berkembang seiring dengan persediaan makanan yang dimiliki. Keadaan seperti ini bisa ditulis ke dalam bentuk persamaan:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

Apabila tidak ada kijang, maka populasi macan tutul akan berkurang dengan laju sebanding dengan populasinya, keadaan ini bisa ditulis dengan persamaan:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y$$

Laju pertumbuhan alami mangsa tanpa memperhitungkan adanya pemangsa dinotasikan pada α , sedangkan γ merupakan laju kematian alami pada pemangsa. Karena terjadi interaksi di antara kedua populasi, maka dapat kita modelkan kedalam persamaan menjadi,

$$\text{Persamaan mangsa : } \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad (2.1)$$

$$\text{Persamaan pemangsa : } \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \quad (2.2)$$

dengan β adalah laju kematian mangsa yang bergantung pada pemangsa dan jumlah mangsa yang ada, dan pada δ sebagai laju pertumbuhan pemangsa dengan adanya mangsa. Simbol dari jumlah pemangsa adalah y dan untuk jumlah mangsa disimbolkan dengan x . Pertumbuhan mangsa dan pemangsa disimbolkan dengan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$.

2.4. Daya Dukung Lingkungan

Pengertian daya dukung lingkungan atau *carrying capacity* dalam konteks ekologi merujuk pada jumlah maksimum populasi atau komunitas yang dapat ditopang oleh sumber daya dan jasa ekosistem yang tersedia. Faktor-faktor yang memengaruhi keterbatasan ekosistem dalam mendukung kehidupan meliputi jumlah sumber daya yang ada, ukuran populasi, serta pola konsumsi. Konsep ini erat kaitannya dengan modal alam.

3. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan metode studi literatur, yaitu dengan mengkaji berbagai literatur yang berkaitan dengan topik penelitian. Metode ini dilakukan untuk mengumpulkan informasi yang relevan melalui hasil pencarian di buku - buku maupun artikel dari jurnal ilmiah dengan permasalahan yang diteliti serta menganalisis inti permasalahannya, kemudian disusun dan disampaikan secara sistematis serta sesuai kaidah yang berlaku.

3.1. Tahapan Penelitian



Gambar 3.1. Diagram Tahapan Penelitian

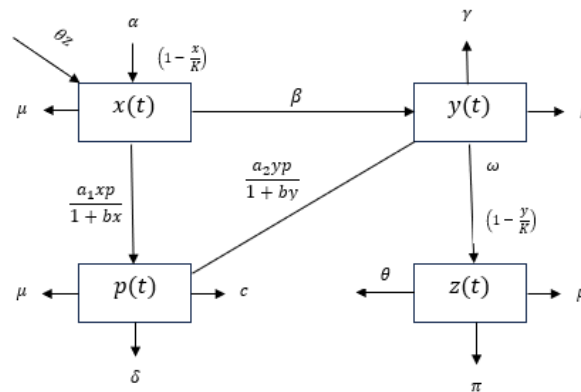
4. Hasil dan Pembahasan

4.1. Model Predator – Prey dengan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya Infeksi pada Prey dan Pemanenan Pada Predator

Asumsi – asumsi yang dapat digunakan dalam model hubungan antar mangsa dan pemangsa ini adalah

1. Hanya mangsa sehat yang dapat tumbuh. Tanpa adanya pemangsa, mangsa sehat dapat tumbuh secara logistik dengan laju pertumbuhan sebesar α .
2. Adanya kematian alami pada masing-masing populasi dengan laju kematian sebesar μ .
3. Infeksi antar mangsa terjadi akibat interaksi yang menyebabkan mangsa sehat menjadi terinfeksi, sehingga jumlah mangsa sehat berkurang dengan laju infeksi sebesar β .
4. Infeksi akan menyebabkan kematian pada populasi terinfeksi secara proporsional sebesar γ .
5. Mangsa yang di-*treatment* tidak bisa dimangsa oleh pemangsa.
6. Mangsa terinfeksi ditreatment dengan laju proporsional sedangkan populasi infeksi *treatment* tumbuh secara logistik dengan *carrying capacity* K . Kegagalan *treatment* akan mengakibatkan kematian bagi mangsa secara proporsional sebesar π .
7. Kesembuhan pada mangsa di-*treatment* akan langsung berpindah ke mangsa sehat sebesar θ .
8. Adanya pemanenan pada populasi pemangsa sehingga populasi pemangsa berkurang dengan laju pemanenan sebesar δ .
9. Mangsa adalah satu-satunya sumber makanan bagi pemangsa sebagai penunjang kehidupan sehingga tidak adanya mangsa akan mengakibatkan kematian pemangsa sebesar c sedangkan adanya mangsa mengakibatkan pertumbuhan sebanding dengan jumlah populasi keduanya sebesar α_1 .
10. Pemangsa yang memangsa mangsa terinfeksi akan mengalami kematian, sebanding dengan jumlah kedua populasi dengan konstanta α_2 .
11. Pemangsa berinteraksi dengan mangsa sehat dan mangsa sakit mengikuti fungsi respon Holling Tipe II

Sehingga hubungan antar mangsa dan pemangsa dan telah dipengaruhi oleh fungsi Respon Holling tipe II di habitat tersebut diberikan pada Gambar 1.



Gambar 4.1. Skema relasi antar populasi mangsa dan pemangsa dalam model

Daftar variabel dan parameter yang digunakan seperti dalam **Tabel 4.1.** berikut:

Tabel 4.1. Diagram kompartemen model predator – prey dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada prey dan pemanenan pada predator

Notasi	Interpretasi
x	Jumlah mangsa sehat
y	Jumlah mangsa terinfeksi
z	Jumlah mangsa di-treatment
p	Jumlah pemangsa
K	Koefisien daya dukung lingkungan
α	Laju pertumbuhan mangsa sehat
b	Koefisien fungsi respon Holling tipe II
μ	Laju kematian alami tiap sub-populasi
β	Laju interaksi mangsa sehat dengan mangsa terinfeksi
γ	Laju kematian mangsa terinfeksi akibat terinfeksi
ω	Laju proporsional mangsa terinfeksi di-treatment
π	Laju kematian akibat kegagalan treatment
δ	Laju pemanenan populasi pemangsa
a_1	Laju pertumbuhan pemangsa sebanding dengan efisiensi konsumsi pemangsa terhadap mangsa sehat
a_2	Laju kematian pemangsa sebanding dengan efisiensi konsumsi pemangsa terhadap mangsa terinfeksi
c	Kematian pemangsa akibat tidak adanya mangsa
r	Laju pertumbuhan logistik mangsa di-treatment
θ	Pengaruh treatment terhadap populasi mangsa sehat

4.2. Titik Keseimbangan (Equilibrium)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) + \theta z - \frac{a_1 x p}{1 + b x} - \beta x y - \mu x \\ \frac{dy}{dt} = \beta x y - \gamma y - \mu y - \frac{a_2 y p}{1 + b y} - \omega y \\ \frac{dz}{dt} = \omega y \left(1 - \frac{y}{K}\right) - \mu z - \pi z - \theta z \\ \frac{dp}{dt} = \frac{a_1 x p}{1 + b x} - \frac{a_2 y p}{1 + b y} - \mu p - \delta p - c p \end{cases}$$

Dari sistem persamaan diferensial tersebut, maka titik keseimbangan yang akan dicari ada tiga yaitu: **Titik keseimbangan trivial atau asal** : dimana keberadaan untuk populasi itu masih dikatakan musnah atau mati. **Titik keseimbangan semi – trivial**: pada titik ini, tidak semua populasi memiliki nilai nol, melainkan hanya beberapa populasi tertentu yang penuh atau tidak ada. **Titik**

kesetimbangan non - trivial: kondisi di mana semua populasi dalam model (mangsa sehat, mangsa terinfeksi, mangsa di - *treatment* dan pemangsa) tidak bernilai nol atau dalam kata lain, semua populasi tetap ada dan saling berinteraksi pada nilai stabil yang bukan nol.

4.2.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Masing-masing fungsi persamaan di atas diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, selanjutnya dibentuk ke dalam matriks Jacobian, sebagai berikut:

$$Jf(x, y, z, p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial p} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial p} \\ \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial j}{\partial y} & \frac{\partial j}{\partial z} & \frac{\partial j}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Setelah masing - masing fungsi persamaan diturunkan secara parsial terhadap variabelnya, maka matriks $Jf(x, y, z, p)$ di atas menjadi:

$$J = \begin{vmatrix} \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha x}{K} - \frac{a_1 p}{bx + 1} + \frac{a_1 x p b}{(bx + 1)^2} - \beta y - \mu & -\beta x & \theta & -\frac{a_1 x}{1 + bx} \\ \beta y & \beta x - \gamma - \mu - \frac{a_2 p}{1 + by} + \frac{a_2 p y b}{(by + 1)^2} - \omega & 0 & -\frac{a_2 y}{1 + by} \\ 0 & r \left(1 - \frac{y}{K}\right) - \frac{r y}{K} & -\mu - \pi - \theta & 0 \\ \frac{a_1 p}{1 + bx} - \frac{a_1 x p b}{(bx + 1)^2} & -\frac{a_2 p}{1 + by} + \frac{a_2 y p b}{(1 + by)^2} & 0 & \frac{a_1 x}{1 + bx} - \frac{a_2 y}{1 + by} - \mu - \delta - c \end{vmatrix}$$

Untuk mengetahui sifat titik kesetimbangan mendatang, maka titik kestabilan harus di uji kestabilannya terlebih dahulu melalui linearisasi nilai-nilai eigen. Selanjutnya untuk menghitung titik - titik kesetimbangan, diperlukan nilai - nilai parameter. Nilai parameter ini berupa asumsi - asumsi yang digunakan dalam menganalisis model *predator-prey* ini.

Tabel 4.2. Nilai asumsi parameter untuk model *predator - prey* dengan fungsi respon Holling Tipe II, infeksi pada *prey* dan pemanenan pada *predator*

NOTASI	INTERPRETASI	NILAI
K	Koefisien daya dukung lingkungan	100
α	Laju pertumbuhan mangsa sehat	0.5
b	Koefisien fungsi respon Holling tipe II	0.01
μ	Laju kematian alami tiap sub-populasi	0.1
β	Laju interaksi mangsa sehat dengan mangsa terinfeksi	0.1
γ	Laju kematian mangsa terinfeksi akibat terinfeksi	0.05
ω	Laju proporsional mangsa terinfeksi di- <i>treatment</i>	0.3
π	Laju kematian akibat kegagalan <i>treatment</i>	0.03
δ	Laju pemanenan populasi pemangsa	0.1
a₁	Laju pertumbuhan pemangsa sebanding dengan efisiensi konsumsi pemangsa terhadap mangsa sehat	0.5
a₂	Laju kematian pemangsa sebanding dengan efisiensi konsumsi pemangsa terhadap mangsa terinfeksi	0.3
c	Kematian pemangsa akibat tidak adanya mangsa	0.02
r	Laju pertumbuhan logistik mangsa di- <i>treatment</i>	0.1

θ	Pengaruh <i>treatment</i> terhadap populasi mangsa sehat	0.02
----------	--	------

4.2.1.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Trivial

Kestabilan titik kesetimbangan trivial atau E_0^* adalah dengan mensubstitusikan nilai $E_0^* = (0,0,0,0)$ pada matriks $Jf(x, y, z, p)$ dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$J = \begin{vmatrix} \alpha - \mu & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu - \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -\mu - \pi - \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \delta - c \end{vmatrix}$$

Setelah matriks Jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya, yaitu mencari nilai $\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$ untuk memperoleh nilai-nilai eigen dari matriks sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$$

Sehingga dapat ditentukan nilai - nilai eigen dari persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha - \mu \\ \lambda &= -(\gamma + \mu + \omega) \\ \lambda &= -(\mu + \pi + \theta) \\ \lambda &= -(\mu + \delta + c) \end{aligned}$$

Untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan dari persamaan yang diberikan, perlu dilihat nilai-nilai eigen yang diperoleh masing-masing persamaan. Nilai eigen ini memberikan informasi tentang kestabilan titik kesetimbangan dalam sistem dinamik.

4.2.1.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Semi-trivial

a. Titik Kesetimbangan semi - trivial ketika pemangsa punah

Titik kesetimbangan semi - trivial dimana pemangsa $p = 0$ berarti pemangsa tidak ada, sementara populasi lainnya (mangsa sehat, mangsa terinfeksi dan mangsa di *treatment*) dapat bertahan. Untuk menemukan titik kesetimbangan ini, ditetapkan $p = 0$ dan akan dicari solusi untuk variabel lainnya.

Selanjutnya setiap persamaan di substitusi dengan setiap nilai-nilai parameter yang ada, dan diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0,5x \left(1 - \frac{x}{100}\right) + 0,02z - 0,1xy - 0,1x = 0 \\ \frac{dy}{dt} &= 0,1xy - 0,05y - 0,1y - 0,3y = 0 \\ \frac{dz}{dt} &= 0,1y \left(1 - \frac{y}{100}\right) - 0,1z - 0,03z - 0,02z = 0 \\ \frac{dp}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga ketika tidak adanya *predator* maka titik kesetimbangan yang diperoleh adalah $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (5, 4, 2, 0)$. Selanjutnya adalah mencari bentuk kestabilan dari titik kesetimbangan ini. Kestabilan titik kesetimbangan semi - trivial ketika tidak adanya *predator* adalah dengan mensubstitusikan $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (5, 4, 2, 0)$. Sehingga diperoleh:

$$J = \begin{vmatrix} \alpha \left(1 - \frac{5}{K}\right) - \frac{5\alpha}{K} - 4\beta - \mu & -5\beta & \theta & -\frac{5a_1}{5b + 1} \\ 4\beta & 5\beta - \gamma - \mu - \omega & 0 & -\frac{4a_2}{4b + 1} \\ 0 & r \left(1 - \frac{4}{K}\right) - \frac{4r}{K} & -\mu - \pi - \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4a_2}{4b + 1} - \mu - \delta - c \end{vmatrix}$$

Setelah matriks Jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya yaitu mencari nilai $\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$ untuk memperoleh nilai-nilai eigen dari matriks. Dalam

proses penyelesaian model ini, pendekatan perhitungan manual telah dilakukan hingga tahap Jacobian matriks. Namun, seiring meningkatnya kompleksitas model dan sistem persamaan yang dianalisis, metode perhitungan manual menjadi kurang efisien dan sulit untuk diselesaikan secara analitik.

b. Titik Kesetimbangan semi - trivial ketika tidak ada mangsa sehat

Dengan tidak adanya mangsa sehat ($x = 0$), sistem persamaan diferensial menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= -0,05y - 0,1y - \frac{0,3yp}{1 + 0,01y} - 0,3y = 0 \\ \frac{dz}{dt} &= 0,1y \left(1 - \frac{y}{100}\right) - 0,1z - 0,03z - 0,02z = 0 \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{0,3yp}{1 + 0,01y} - 0,1p - 0,1p - 0,02p = 0\end{aligned}$$

Sehingga titik kesetimbangan yang diperoleh ketika tidak ada mangsa sehat yaitu $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (0, 0, 0, 0)$. Untuk menguji kestabilan titik kesetimbangan tanpa mangsa sehat ini adalah dengan mensubstitusikan nilai $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (0, 0, 0, 0)$ pada matriks $Jf(x, y, z, p)$ dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$J = \begin{vmatrix} \alpha - \mu & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu - \omega & 0 & 0 \\ 0 & r & -\mu - \pi - \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \delta - c \end{vmatrix}$$

Setelah matriks Jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya, yaitu mencari nilai $\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$ untuk memperoleh nilai-nilai eigen dari matriks sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$$

Sehingga dapat ditentukan nilai - nilai eigen dari persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha - \mu \\ \lambda &= -(\gamma + \mu + \omega) \\ \lambda &= -(\mu + \pi + \theta) \\ \lambda &= -(\mu + \delta + c)\end{aligned}$$

c. Titik Kesetimbangan semi - trivial ketika tidak ada mangsa terinfeksi

Karena $y = 0$, maka sistem persamaan diferensial menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0,5x \left(1 - \frac{x}{K}\right) + 0,02z - \frac{0,5xp}{1 + 0,01x} - 0,1x = 0 \\ \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{dz}{dt} &= -0,1z - 0,03z - 0,02z = 0 \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{0,5xp}{1 + 0,01x} - 0,1p - 0,1p - 0,02p = 0\end{aligned}$$

Sehingga titik kesetimbangan ketika tidak adanya mangsa terinfeksi adalah $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (80, 0, 0, 0)$.

Untuk menguji kestabilan titik kesetimbangan tanpa mangsa terinfeksi ini adalah dengan mensubstitusikan nilai $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (80, 0, 0, 0)$ pada matriks $Jf(x, y, z, p)$ dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$J = \begin{vmatrix} \alpha \left(1 - \frac{80}{K}\right) - \frac{80\alpha}{K} - \mu & -80\beta & \theta & -\frac{80a_1}{80b + 1} \\ 0 & 80\beta - \gamma - \mu - \omega & 0 & 0 \\ 0 & r & -\mu - \pi - \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{80a_1}{80b + 1} - \mu - \pi - c \end{vmatrix}$$

Setelah matriks Jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya, yaitu mencari nilai $\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$ untuk memperoleh nilai-nilai eigen dari matriks sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$$

Sehingga dapat ditentukan nilai - nilai eigen dari persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda = -\mu - \pi - \theta ; \lambda = 80\beta - \gamma - \mu - \omega ; \lambda = \frac{K\alpha - K\mu - 160\alpha}{K} ; \text{ dan}$$

$$\lambda = \frac{-80bc - 80b\delta - 80b\mu + 80a_1 - c - \delta - \mu}{80b + 1}$$

Untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan dari persamaan yang diberikan, maka perlu dilihat nilai - nilai eigen yang telah diperoleh.

d. Titik Kesetimbangan semi - trivial ketika tidak ada mangsa di-treatment

Dengan $z = 0$, sistem persamaan diferensial menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = 0,5x \left(1 - \frac{x}{100}\right) - \frac{0,5xp}{1 + 0,01x} - 0,1xy - 0,1x = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,1xy - 0,05y - 0,1y - \frac{0,3yp}{1 + 0,01y} - 0,3y = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{0,5xp}{1 + 0,01x} - \frac{0,3yp}{1 + 0,01y} - 0,1p - 0,1p - 0,02p = 0$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan ketika tidak adanya mangsa di-treatment adalah $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (5, 4, 0, 0)$. Untuk menguji kestabilan titik kesetimbangan tanpa mangsa di-treatment ini adalah dengan mensubstitusikan nilai $(x^*, y^*, z^*, p^*) = (5, 4, 0, 0)$ pada matriks $Jf(x, y, z, p)$ dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$= \begin{vmatrix} \alpha \left(1 - \frac{5}{K}\right) - \frac{5\alpha}{K} - 4\beta - \mu & -5\beta & \theta & -\frac{5a_1}{5b + 1} \\ 4\beta & 5\beta - \gamma - \mu - \omega & 0 & -\frac{4a_2}{4b + 1} \\ 0 & r \left(1 - \frac{4}{K}\right) - \frac{4r}{K} & -\mu - \pi - \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5a_1}{5b + 1} - \frac{4a_2}{4b + 1} - \mu - \delta - c \end{vmatrix}$$

Setelah matriks Jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya yaitu mencari nilai $\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*, z^*, p^*)) = 0$ untuk memperoleh nilai-nilai eigen dari matriks. Dalam proses penyelesaian model ini, pendekatan perhitungan manual telah dilakukan hingga tahap Jacobian matriks. Untuk mendapatkan Solusi yang lebih cepat, akurat dan komprehensif, simulasi numerik menggunakan perangkat lunak dilakukan sebagai alternatif. Pendekatan ini memungkinkan penyelesaian model dengan mempertimbangkan seluruh parameter serta dinamika sistem secara lebih efektif.

4.2.1.3. Eksistensi Titik Kesetimbangan Non - Trivial

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) + \theta z - \frac{a_1 xp}{1 + bx} - \beta xy - \mu x = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y - \mu y - \frac{a_2 yp}{1 + by} - \omega y = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - \mu z - \pi z - \theta z = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{a_1 xp}{1 + bx} - \frac{a_2 yp}{1 + by} - \mu p - \delta p - cp = 0$$

Titik kesetimbangan non - trivial diperoleh:

- Persamaan x

$$\alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) + \theta z - \frac{a_1 xp}{1 + bx} - \beta xy - \mu x = 0$$

- Persamaan y

$$\beta xy - \gamma y - \mu y - \frac{a_2 yp}{1 + by} - \omega y = 0$$

- Persamaan z

$$ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - \mu z - \pi z - \theta z = 0$$

- Persamaan p

$$\frac{a_1 xp}{1 + bx} - \frac{a_2 yp}{1 + by} - \mu p - \delta p - cp = 0$$

$$\frac{a_1 xp}{1 + bx} - \frac{a_2 yp}{1 + by} - (\mu + \delta + c)p = 0$$

$$\left(\frac{a_1 x}{1 + bx} - \frac{a_2 y}{1 + by}\right)p = (\mu + \delta + c)p$$

$$\frac{a_1 x}{1 + bx} - \frac{a_2 y}{1 + by} = \mu + \delta + c$$

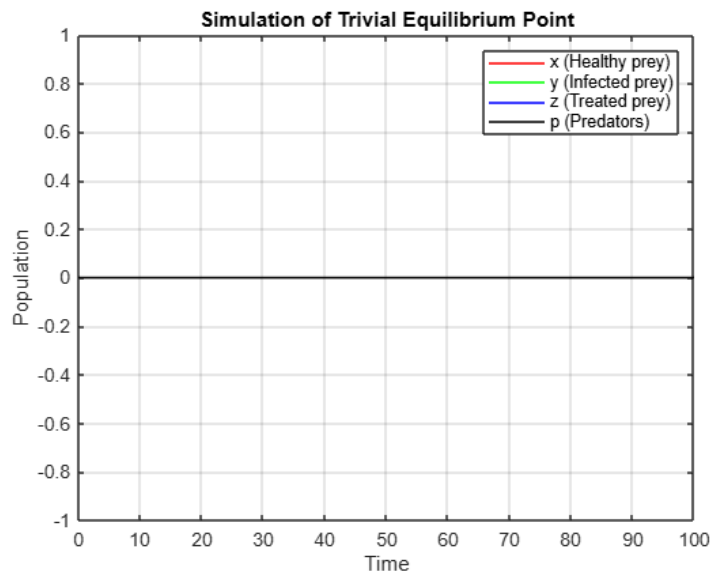
Maka, titik kesetimbangan non - trivial yang diperoleh adalah:

$$(x^*, y^*, z^*, p^*) = (x^*, y^*, z^*, p^*)$$

Untuk mendapatkan solusi yang lebih cepat, akurat dan komprehensif, simulasi numerik menggunakan perangkat lunak dilakukan sebagai alternatif. Pendekatan ini memungkinkan penyelesaian model dengan mempertimbangkan seluruh parameter serta dinamika sistem secara lebih efektif.

4.3. Simulasi Model

4.3.1. Simulasi Model Bentuk Kesetimbangan Trivial

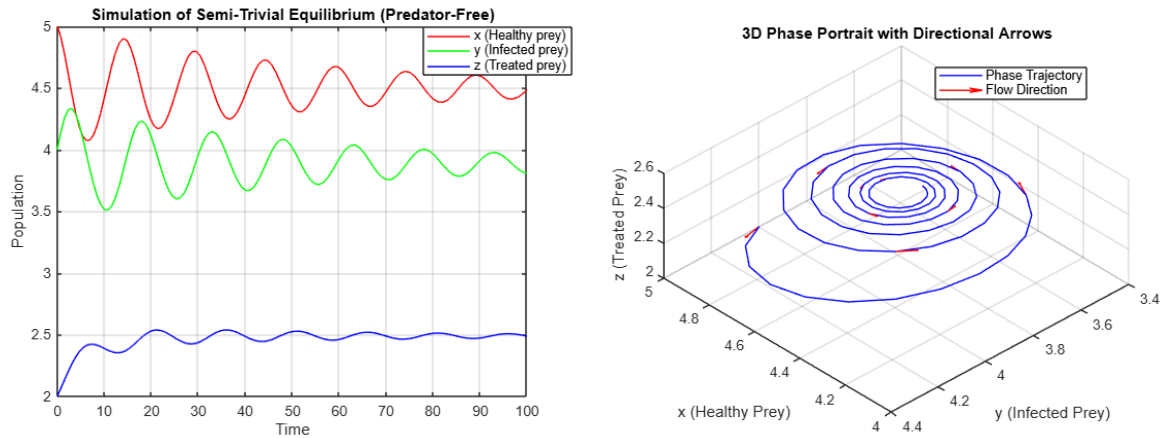


Gambar 4.2. Simulasi Kesetimbangan Trivial

Dapat dilihat bahwa ketika setiap sub populasi berada dalam kondisi trivial (tidak ada sub populasi yang hidup) maka tidak terdapat interaksi yang terjadi dan grafik tersebut menunjukkan kestabilan dimana setiap sub populasi berada di angka nol. Simulasi *matlab* ini mengonfirmasi bahwa titik kesetimbangan trivial ($x = 0; y = 0; z = 0; p = 0$) adalah stabil dalam kondisi tertentu (sesuai dengan analisis kestabilan sebelumnya).

4.3.2. Simulasi Model Bentuk Kestimbangan Semi-Trivial

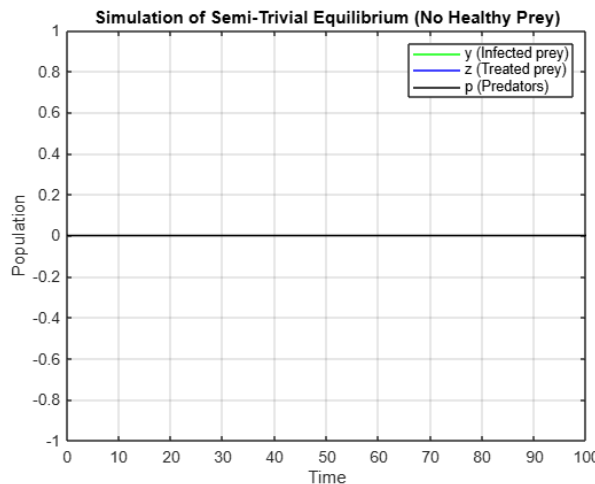
4.3.2.1. Simulasi Kestimbangan tanpa Pemangsa



Gambar 4.3. Simulasi Kestimbangan Bebas Pemangsa dan Potret Fase 3D dari Kestimbangan Bebas Pemangsa

Pada simulasi menggunakan bantuan *software Matlab* dilihat bahwa populasi mangsa sehat (x) berada di puncak tertinggi diikuti dengan populasi mangsa terinfeksi (y) dan populasi mangsa di-*treatment* (z). Tidak adanya proses pemangsaan oleh *predator* yang menyebabkan populasi mangsa sehat yang tumbuh meningkat. Namun dapat dilihat juga pada beberapa waktu tertentu, populasi mangsa sehat menurun seiring dengan kenaikan populasi mangsa terinfeksi dan mangsa di-*treatment* yang diakibatkan oleh adanya penyebaran infeksi. Grafik ini menunjukkan bahwa populasi pada akhirnya mencapai kestabilan (*semi-trivial equilibrium*) tanpa kehadiran *predator*. Ini menggambarkan bagaimana interaksi antara mangsa sehat, mangsa terinfeksi dan mangsa di-*treatment* akan beresilasi terlebih dahulu sebelum menuju titik keseimbangan tertentu. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Fase Potret 3D di bawah ini.

4.3.2.2. Simulasi Kestimbangan tanpa Mangsa Sehat

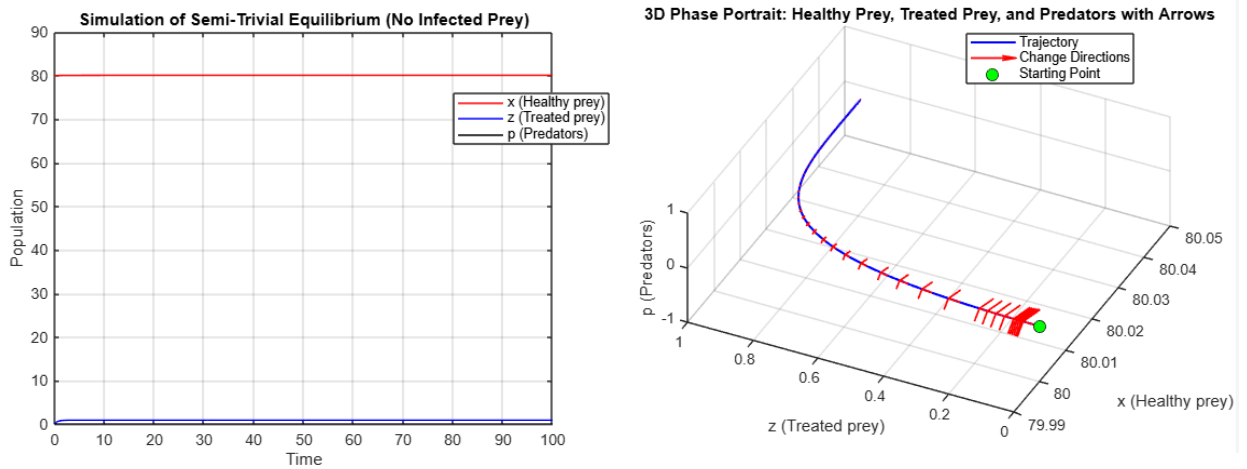


Gambar 4.5. Simulasi Kestimbangan tanpa Mangsa Sehat

Berdasarkan grafik hasil simulasi menggunakan bantuan *software Matlab*, setiap populasi tanpa adanya mangsa sehat berada di nol (dapat dikatakan punah). Hal ini bisa saja terjadi dikarenakan sub populasi mangsa sehat yang memegang peranan penting dalam analisis ini. Tanpa mangsa sehat, maka tidak adanya pemangsaan dan *predator* (p) menjadi kelaparan dan berakhir pada kepunahan populasi. Tidak ada mangsa sehat juga berarti bahwa tidak ada penyebaran penyakit yang terjadi sehingga sub populasi mangsa terinfeksi (y) juga habis (dapat dikatakan punah) diikuti dengan

populasi mangsa di-*treatment* (y). Tanpa adanya mangsa terinfeksi maka tidak ada yang melakukan *treatment* sehingga populasi dapat punah.

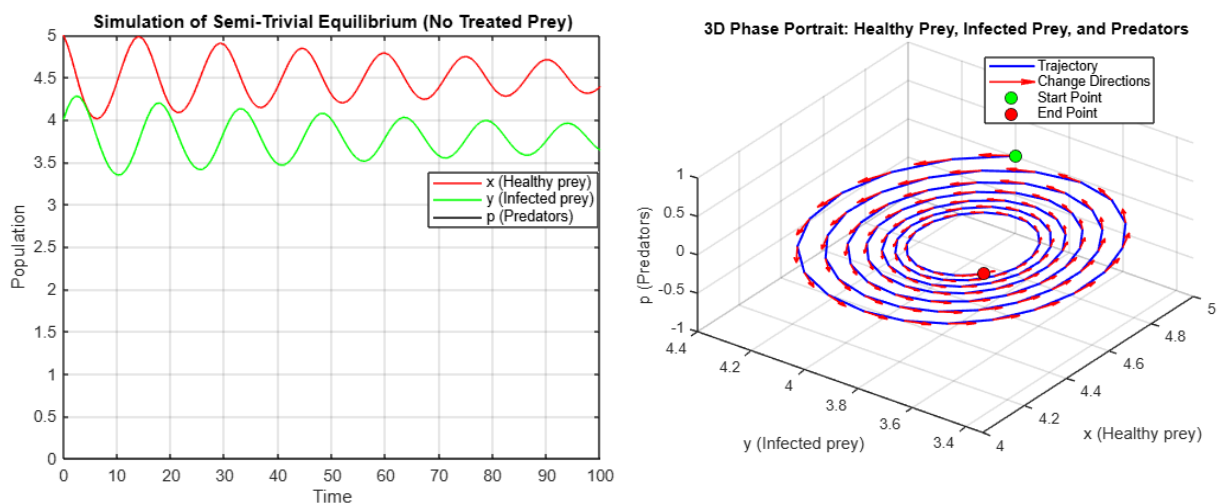
4.3.2.3. Simulasi Kesetimbangan tanpa Mangsa Terinfeksi



Gambar 4.6. Simulasi Kesetimbangan tanpa Mangsa Terinfeksi dan Potret Fase 3D dari Kesetimbangan tanpa Mangsa Terinfeksi

Kedua gambar tersebut menunjukkan bahwa dalam kondisi tertentu, mangsa sehat mendominasi sistem, sementara mangsa di-*treatment* dan *predator* tidak mampu mempertahankan populasinya dan akhirnya menuju kepunahan. Hal ini mungkin disebabkan oleh ketidakefisienan *predator* dalam memangsa mangsa sehat dan tidak adanya penyebaran infeksi pada mangsa sehat, sehingga mangsa tetap berada dalam kondisi stabil. Dengan kata lain, sistem ini mencapai kesetimbangan semi - trivial di mana hanya mangsa sehat yang bertahan dalam jangka Panjang.

4.3.2.4. Simulasi Kesetimbangan tanpa Mangsa di-Treatment

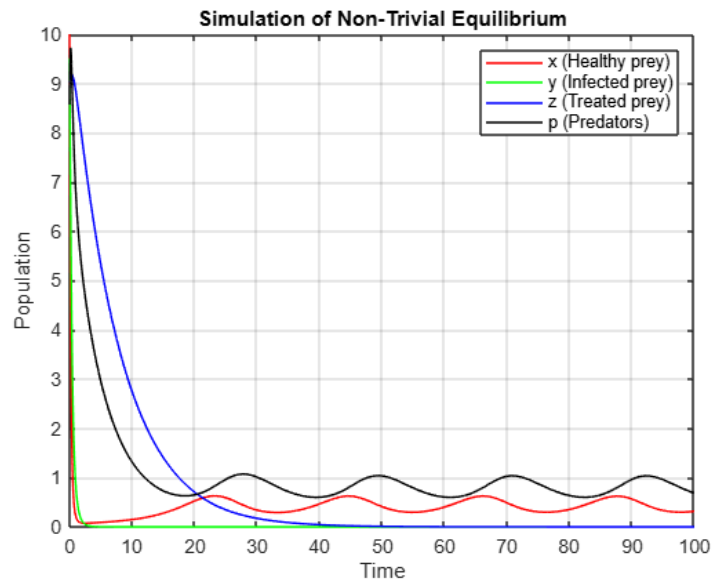


Gambar 4.8. Simulasi Kesetimbangan tanpa Mangsa di-Treatment dan Potret Fase 3D dari Kesetimbangan tanpa Mangsa di-Treatment

Berdasarkan hasil simulasi menggunakan bantuan *software Matlab* populasi mangsa sehat (x) berada di posisi teratas diikuti oleh populasi populasi mangsa terinfeksi. Berdasarkan perhitungan sebelumnya bahwa tidak adanya *predator* ($p = 0$) maka dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi proses pemangsaan yang dilakukan oleh *predator* (p) dan tidak penyebaran infeksi yang terjadi

berakhir pada kematian. Potret Fase 3D menunjukkan hubungan antara populasi mangsa sehat (x), mangsa terinfeksi (y) dan predator (p). Panah merah yang menunjukkan arah perubahan (*flow direction*) dinamika sistem, yaitu bagaimana ketiga populasi berubah dari waktu ke waktu. Sistem cenderung menuju keseimbangan (pusat spiral) sebagai titik akhir dinamika. Trajektori yang dilambangkan oleh garis biru menggambarkan perubahan ketiga populasi dari waktu ke waktu. Bentuk viral menuju pusat menunjukkan bahwa sistem mengalami osilasi dan akhirnya mencapai titik keseimbangan stabil.

4.3.3. Simulasi Model Bentuk Titik Kesetimbangan Non - Trivial

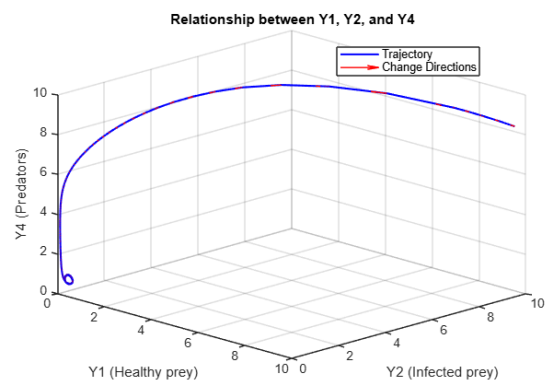
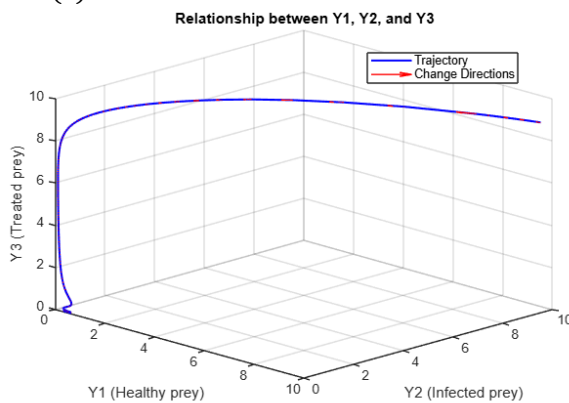


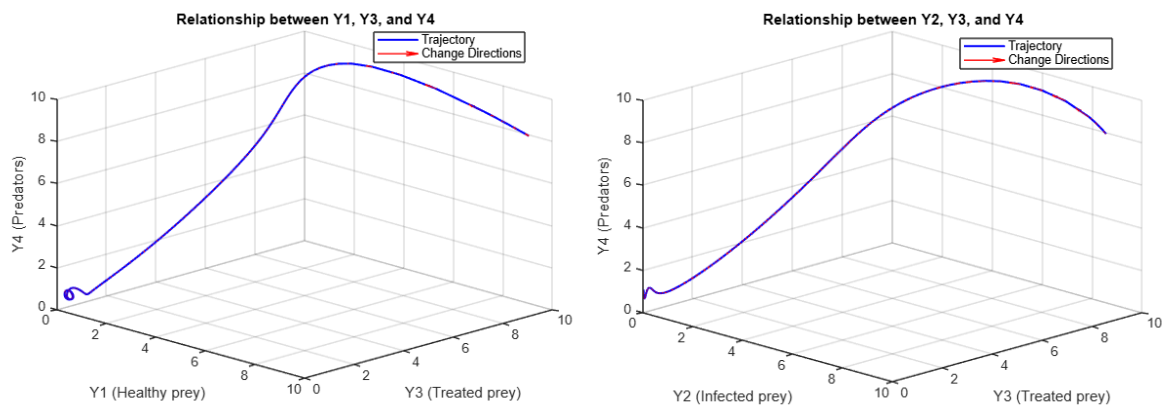
Gambar 4.10. Simulasi Kesetimbangan Non - Trivial

Berdasarkan hasil simulasi menggunakan *Matlab* grafik dilihat bahwa **Populasi Mangsa Sehat (merah)** pada awalnya tinggi, lalu menurun drastis namun kembali meningkat dan terus berfluktuasi. **Populasi Mangsa Terinfeksi (hijau)** tetap sangat rendah sepanjang simulasi, yang menunjukkan infeksi tidak menyebar luas. **Populasi Mangsa di-treatment (biru)** mengalami penurunan awal, lalu stabil di nol yang menunjukkan keterkaitannya dengan mangsa terinfeksi. **Populasi Predator (hitam)** mengikuti pola naik-turun yang selaras dengan populasi mangsa dan menurun saat populasi mangsa berkurang dan meningkat saat populasi mangsa bertambah.

Selanjutnya akan dilihat hubungan antara setiap sub populasi di titik kesetimbangan non - trivial ini.

- a. Hubungan antara mangsa sehat (x) dengan mangsa terinfeksi (y) dan mangsa di-treatment (z)





Gambar 4.11. Fase Potrait 3D Hubungan interaksi antara mangsa sehat, mangsa terinfeksi, dan predator .

5. Kesimpulan

Proses simulasi menunjukkan beberapa kondisi sistem diantaranya: **Kondisi Trivial**: tidak ada interaksi karena semua populasi habis, **Kondisi Semi-Trivial**: Misalnya tanpa predator, populasi mangsa sehat tumbuh secara eksponensial sebelum stabil, sementara mangsa terinfeksi dan mangsa di-treatment fluktuatif tergantung infeksi dan treatment, dan **Kondisi Non-Trivial**: semua populasi mencapai kestabilan dinamis setelah fluktuasi awal. Interaksi antara pemangsa dan mangsa menunjukkan adanya siklus populasi yang dipengaruhi parameter seperti laju infeksi dan pemanenan. Hasil simulasi juga mengonfirmasi bahwa kestabilan sistem sangat dipengaruhi oleh nilai parameter, seperti laju pertumbuhan mangsa sehat, efektivitas treatment dan tingkat pemanenan pemangsa. Perubahan kecil pada parameter dapat menyebabkan perubahan signifikan pada dinamika populasi.

References

- [1]. D. Deden, "One - Prey Two - Prey Model with Prey Harvesting in a Food Chain Interaction.," *International Symposium on Current Progress in Mathematics and Sciences (ISCPMS 2016)*, pp. 1 - 8, 2017.
- [2]. Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*, Erlangga, Jakarta. 1998.
- [3]. Neuhauser, C., & Roper, M. L. 2004. *Calculus for biology and medicine*. Upper Saddle River: Pearson
- [4]. T. D. Agustito, "Model predator - Prey dengan Dua Predator dan Satu Prey Terinfeksi," *Indonesia Journal of Mathematics Education*, Vols. Vol. , No. 1, pp. 8 - 15, 2018.
- [5]. D. Fardinah, "Analisis Model Mangsa - Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling tipe II, Infeksi pada Pemangsa dan Pemanenan pada Mangsa," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 9(1), pp. 78 - 90, 2023.
- [6]. J. K. d. K. H. Hale, *Dynamic and Biffurcation*, Springer-verlag, New York, 1991.
- [7]. S. Kholipah, "Model matematika mangsa - pemangsa dengan Sebagian Mangsa Sakit," *Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*, 2013.
- [8]. N. F. Ladas, "Ordinary Differential Equations with Modern Application," Belmont, California, 1982, p. 132.
- [9]. M. d. Mansur, "Analisis Model Predator Prey dengan Adanya Penyakit pada Prey dan Pemanenan pada Predator," *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, pp. 54-58, 2020.

- [10]. J. D. Meiss, *Differential Dynamical Systems*, society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2007.
- [11]. Z. Mu'tamar K & Zulkarnain, "Model *Predator - Prey* dengan Adanya Infeksi dan Pengobatan Pada Populasi Mangsa," *Sitekin: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, pp. 15(1), 1 - 6, 2017.
- [12]. D. Rina, "Model Matematika Mangsa - Pemangsa dengan Sebagian Mangsa Sakit dan Pemanenan pada Pemangsa," *Journal of Mathematics: Theory and application*, pp. 59 - 63, 2019.
- [13]. S. B. Waluya, "Sistem Persamaan Diferensial," in *Persamaan Diferensial*, Yogyakarta, Graha Ilmu, 2006, p. 3.

