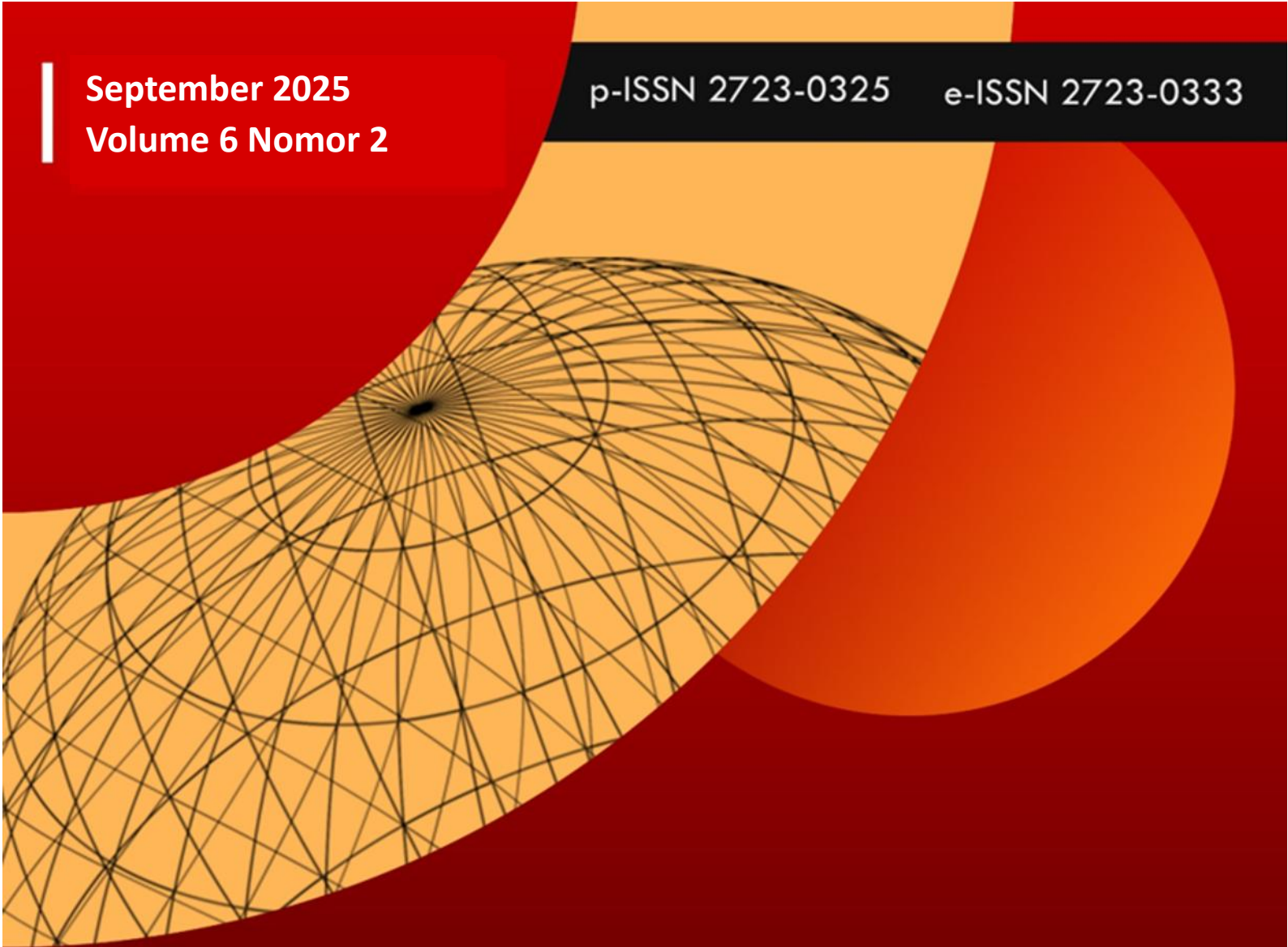


September 2025
Volume 6 Nomor 2

p-ISSN 2723-0325

e-ISSN 2723-0333



TENSOR

Pure and Applied Mathematics Journal

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PATTIMURA



is an international academic open-access journal that gains a foothold in mathematics, and its applications are issued twice a year. The focus is to publish original research and review articles on all aspects of pure and applied Mathematics. Editorial board members of the Journal and reviewers will review submitted papers. All submitted articles should report original, previously unpublished research results, experimental or theoretical, and will be peer-reviewed. Articles submitted to the journal should meet these criteria and must not be under consideration for publication elsewhere. Manuscripts should follow the journal template and are subject to both review and editing.

Published by:

**Department of Mathematics,
Faculty of Science and Technology,
Pattimura University.
Ambon
2025**

Copyright© Program Studi Matematika FST UNPATTI 2025



Volume 6 Number 2 | September 2025

Person In Charge

Head of Undergraduate Program in Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Pattimura University

Editor in Chief

Dr. H. Batkunde, S.Si, M.Si

Editors

M. I. Tilukay, S.Si, M.Si (Managing and Section Editor)
L. Bakarbessy, S.Si, M.Si (Managing and Section Editor)
Z. A. Leleury, S.Si., M.Si (Copy and Production Editor)
B. P. Tomasouw, S.Si, M.Si (Copy and Production Editor)
Dr. L. K. Beay, S.Pd., M.Si (Proofreader)
N. Dahoklory (Proofreader)

Secretariat and Financial Officer

M. E. Rijoly, S.Si, M.Sc

Graphic Design

V. Y. I. Ilwaru, S.Si, M.Si

Expert Editorial Boards

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc (Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Indonesia)
Prof. Dr. M. Salman A. N, M.Si (Institut Teknologi Bandung, Indonesia)
Dr. H. J. Wattimanela, S.Si., M.Si (Universitas Pattimura, Indonesia)
Dr. Al Azhary Masta, S.Si., M.Si (Universitas Pendidikan Indonesia, Indonesia)
Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si (Universitas Hasanudin, Indonesia)
Dr. Meta Kallista, S.Si., M.Si (Universitas Telkom, Indonesia)
Dr. Teguh Herlambang, S.Si., M.Si (Universitas Nahdlatul Ulama Surabaya, Indonesia)
Asst. Prof. Dr. Anurak Thanyacharoen (Muban Chombueng Rajabhat University, Ratchaburi, Thailand)

Publisher

Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Pattimura University, Ambon, Indonesia

Editorial Address

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon 97233, Provinsi Maluku, Indonesia
Contact : +62 82397854220
Email : tensormathematics@gmail.com

Clustering of Regencies/Cities in Maluku Province Based on Tuberculosis Cases Using the K-Medoids Algorithm	Meyriska Wattimena Marlon S. Noya Van Delsen Rosalina Salhuteru	67-74
Pemodelan Sistem Antrian Pelayanan Bpjs (Badan Penyelenggara Jaminan Sosial) Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus	Yohana L. Simbolon Francis Y. Rumlawang Novita Dahoklory Henry W. M. Patty Pranaya D. M. Taihuttu Abraham Z. Wattimena	75-86
Reduksi Noise Pada Citra Digital Menggunakan Metode Arithmetic Mean Filter	Rayhan Khalid Ciptoadi Sintia Sara Sersian Rifaldi Allu Abraham Z. Wattimena Meilin Imelda Tilukay	87-94
Model Predator – Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dengan Adanya Infeksi Pada Prey dan Pemanenan Pada Predator	Hilda Amelia Dorteus. L. Rahakbauw Z. A. Leleury	95-110
Forecasting Inflation Rate in Ternate City Using ARIMA Method and ARIMAX Calendar Variation	Riski Noviyanti Ilu Ronald John Djami Novita Serly Laamena	111-120
Aplikasi Metode Adams Bashforth Moulton Dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Kota Ambon	Fikram Radjab Francis Yunito Rumlawang	121-130

Pemodelan Sistem Antrian Pelayanan BPJS (Badan Penyelenggara Jaminan Sosial) Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus

Yohana L. Simbolon^{1*}, Francis Y. Rumlawang², Novita Dahoklory^{3*}, Henry W. M. Patty⁴, Pranaya D. M. Taihuttu⁵, Abraham Z. Wattimena⁶

^{1,2,3,4,5,6}Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Pattimura

^{2,3,4,5}Divisi Aljabar dan Analisis, Jurusan Matematika, Universitas Pattimura

*Email: novitadahoklory93@gmail.com

Manuscript submitted : August 2025;

Accepted for publication : September 2025.

doi: <https://doi.org/10.30598/tensorvol6iss2pp75-86>

Abstract: Hospitals are one of the health facilities that serve patients with various types of services, including BPJS patients. Like other hospitals, the queue system is a challenge in service management, especially in outpatient services. The imbalance between the number of patients coming and the service capacity can cause long waiting times. In this study, outpatient queue modeling was carried out at Leimena General Hospital, Ambon, using Petri Net to describe the service flow, and Max-Plus algebraic analysis was applied to estimate patient waiting times more accurately. The simulation results showed that increasing the number of resources, such as adding registration counters and doctors in the laboratory, was able to significantly reduce patient waiting times at various stages of service, especially in the pharmacy. This modeling shows that the Petri Net and Max-Plus approaches are not only effective in mapping the queue system, but can also be used as a basis for decision making in optimizing hospital services. This study is expected to be a reference for hospitals in improving service efficiency and for further researchers to develop more complex models by considering additional relevant variables.

2010 Mathematical Subject Classification: 15A80 .

Keywords: Petri Net, max-plus algebra, BPJS queue

1. Latar Belakang

Rumah sakit merupakan suatu lembaga kesehatan yang menyelenggarakan layanan kesehatan secara individu dan komprehensif, yang mencakup pelayanan rawat inap, rawat jalan, dan gawat darurat (Undang-Undang Rumah Sakit 44 Tahun 2009). Pelayanan kesehatan adalah pemeliharaan atau peningkatan kesehatan melalui upaya untuk mencegah, mendiagnosa, mengobati, memulihkan, atau menyembuhkan penyakit, luka, gangguan fisik dan mental lainnya (Undang-Undang Nomor 36 Tahun 2009 Tentang Kesehatan). Salah satu program Indonesia yang sehat adalah penyelenggara pelayanan kesehatan yang adil dan merata, dengan tujuan memenuhi kebutuhan dasar hidup yang layak dalam mendapatkan pelayanan kesehatan. Seiring dengan era Jaminan Kesehatan Nasional (JKN), seluruh penduduk Indonesia diwajibkan untuk mendaftar melalui Badan Penyelenggara Jaminan Sosial (BPJS Kesehatan).

BPJS merupakan salah satu program pemerintah yang bertujuan untuk menjamin agar peserta memperoleh manfaat pemeliharaan kesehatan dan perlindungan dalam memenuhi kebutuhan dasar

kesehatan. Program ini telah beroperasi sejak 1 Januari 2014 dan mewajibkan seluruh masyarakat Indonesia untuk mendaftarkan diri sebagai anggota, terutama bagi Pegawai Negeri Sipil (PNS), Penerima Pensiun PNS, anggota TNI/POLRI, Veteran, Perintis Kemerdekaan beserta keluarganya, serta Badan Usaha lainnya maupun masyarakat umum. Setiap peserta BPJS akan dikenakan iuran yang besarnya telah ditentukan, sementara bagi warga miskin, iuran BPJS ditanggung oleh pemerintah melalui program Bantuan Iuran. Menjadi peserta BPJS tidak hanya wajib bagi pekerja di sektor formal, tetapi juga bagi pekerja informal. Pekerja informal diwajibkan menjadi anggota BPJS Kesehatan, dengan kewajiban mendaftarkan diri dan membayar iuran sesuai tingkatan manfaat yang diinginkan.

Masalah antrian BPJS di Rumah Sakit Umum merupakan salah satu tantangan signifikan yang memengaruhi kualitas pelayanan kesehatan bagi masyarakat. Dalam praktiknya, pasien yang menggunakan layanan BPJS sering menghadapi waktu tunggu yang sangat lama, baik saat pendaftaran, pengambilan nomor antrian, maupun menunggu giliran untuk mendapatkan pelayanan medis. Hal ini diperburuk oleh sistem manajemen antrian yang masih manual dan kurang optimal, sehingga sulit untuk memastikan alur pasien berjalan secara efisien. Selain itu, tingginya jumlah pasien BPJS yang datang setiap hari tidak sebanding dengan kapasitas layanan yang tersedia, baik dari segi fasilitas maupun sumber daya manusia, seperti tenaga medis dan petugas administrasi. Kurangnya pemanfaatan teknologi digital dalam pengelolaan antrian juga menjadi kendala yang signifikan, sehingga sering kali menimbulkan ketidakpuasan pasien terhadap pelayanan rumah sakit. Akibatnya, banyak pasien merasa tidak nyaman, bahkan beberapa terpaksa meninggalkan antrian karena terlalu lama menunggu. Kondisi ini tidak hanya mencerminkan rendahnya efisiensi dalam pelayanan rumah sakit, tetapi juga berpotensi menurunkan tingkat kepercayaan masyarakat terhadap pelayanan kesehatan yang disediakan oleh fasilitas publik. Oleh karena itu, diperlukan langkah strategis yang melibatkan modernisasi sistem antrian, peningkatan kapasitas pelayanan, serta optimalisasi sumber daya untuk memastikan akses layanan kesehatan yang cepat, efisien, dan berkualitas bagi seluruh pengguna BPJS.

Teori antrian pertama kali digagas oleh A. K. Erlang, seorang matematikawan asal Denmark, pada tahun 1913 melalui karyanya yang berjudul "*Solution of Some Problem in the Theory of Probability of Significance in Automatic Telephone Exchange*." Erlang mengembangkan konsep ini untuk mempelajari bagaimana antrian pelanggan terbentuk ketika mereka menunggu pelayanan dari suatu sistem yang memiliki kapasitas terbatas. Dalam teori antrian, perhatian utama diberikan pada cara sistem menangani permintaan layanan yang datang secara acak, sehingga tercipta barisan tunggu atau antrian yang membutuhkan manajemen yang efisien. Teori ini tidak hanya relevan untuk sistem telepon otomatis, di mana Erlang awalnya mengaplikasikannya, tetapi juga telah berkembang menjadi alat penting dalam berbagai bidang, seperti transportasi, pelayanan kesehatan, dan manajemen industri. Pada dasarnya, antrian adalah contoh dari sistem peristiwa diskrit, di mana perubahan kondisi hanya terjadi pada waktu-waktu tertentu, yakni saat kedatangan atau penyelesaian layanan. Dengan memodelkan antrian, bisa memprediksi berapa lama pelanggan harus menunggu, berapa banyak sumber daya yang diperlukan, dan bagaimana meningkatkan efisiensi layanan, sehingga penerapan teori ini menjadi krusial dalam pengelolaan berbagai sistem yang melibatkan pelayanan dan antrian.

Petri Net merupakan salah satu alat bantu memodelkan sistem *event* diskrit. Petri Net terdiri dari dua himpunan titik yaitu place (P) yang mewakili komponen pasif pada sistem dan transition (T) menunjukkan suatu kondisi yang dapat menyebabkan state yang berbeda. Token terdapat pada place digunakan untuk menentukan keadaan dan tanda panah sebagai relasi atau penghubung antara place dan transitio. Simulasi model petri net pada sistem antrian secara nyata dapat dibantu dengan menggunakan model matematika berbentuk aljabar max-plus.

Aljabar Max-Plus merupakan suatu struktur aljabar yang memuat himpunan semua himpunan rill $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi maksimum (dinotasikan $\oplus$) dan penjumlahan (dinotasikan $\otimes$) [1]. Aljabar max-plus dapat digunakan untuk menggambarkan secara linier dinamika waktu suatu sistem nonlinier dalam aljabar konvensional, sehingga memudahkan dalam pembahasannya. Salah satu contoh

sistem antrian yang dapat dimodelkan dengan petri net dan aljabar max-plus yaitu pada sistem pelayanan BPJS di Rumah sakit umum pusat Leimena.

Antrian merupakan suatu keadaan di mana jumlah pihak yang memerlukan pelayanan lebih banyak dibandingkan dengan kapasitas jasa yang melayani [2]. Suatu antrian yang panjang dapat merugikan pihak yang membutuhkan pelayanan karena menyebabkan pemborosan waktu selama menunggu, menurunkan efisiensi kerja, mengurangi keuntungan, bahkan menimbulkan citra yang kurang baik di mata pelanggan [3]. Oleh karena itu, penyedia layanan perlu mengoptimalkan kinerja sistemnya agar proses pelayanan berjalan secara efisien dan efektif. Permasalahan antrian ini juga diperkuat dalam penelitian Hardiyanti, dkk yang menunjukkan bahwa sistem pelayanan rawat jalan di Rumah Sakit Al Huda Genteng mengalami waktu tunggu panjang akibat alur pelayanan yang kompleks dan keterbatasan sumber daya [4].

Salah satu sistem antrian yang kompleks dapat ditemukan pada pelayanan di Badan Penyelenggara Jaminan Sosial (BPJS). BPJS merupakan badan hukum publik yang menyelenggarakan program jaminan sosial nasional, mencakup jaminan kecelakaan kerja, jaminan hari tua, jaminan pensiun, dan jaminan kematian [5]. Suryanto dalam penelitiannya menunjukkan bahwa sistem manajemen antrian BPJS belum berjalan optimal; rumah sakit yang belum menerapkan sistem antrian digital cenderung memiliki waktu tunggu yang lebih lama, terutama pada layanan rawat jalan [6]. Keterbatasan ruang tunggu, kurangnya tenaga medis, serta staf administrasi turut memperparah kondisi tersebut. Selain itu, antrian panjang juga dipengaruhi oleh keterlambatan verifikasi klaim dan rendahnya pemahaman peserta terhadap prosedur BPJS, terutama mengenai sistem rujukan [7]. Dalam konteks penelitian terdahulu, pendekatan matematis seperti Petri Net dan aljabar Max-Plus terbukti mampu memberikan analisis yang sistematis terhadap sistem antrian [4], [8] [9],[10]. Banyak peserta datang langsung ke rumah sakit tanpa melalui FKTP, sehingga menyebabkan penumpukan pasien. Minimnya sosialisasi dan edukasi tentang alur pelayanan memperburuk situasi ini. Dengan demikian, permasalahan antrian dalam pelayanan BPJS bersifat multidimensional, dipengaruhi oleh faktor manajerial, teknis, dan kebijakan. Upaya perbaikan perlu mencakup peningkatan infrastruktur teknologi, perbaikan sistem manajemen antrian, serta penguatan kebijakan yang mendukung efisiensi dan pemerataan pelayanan kesehatan.

Pada penelitian ini, peneliti memilih BPJS di Rumah sakit umum pusat Leimena sebagai lokasi untuk melakukan penelitian. Penelitian ini dilakukan dengan membangun model petri net yang lebih sederhana namun mampu merepresentasikan keadaan dan alur sistem antrian pelayanan pasien. Selanjutnya, model tersebut akan dianalisis untuk memperoleh estimasi waktu antrian atau pelayanan dengan membentuk model aljabar max-plus dari model petri net yang telah dikembangkan.

2. Metode Penelitian

Adapun prosedur kerja yang telah dan akan ditempuh peneliti dalam penyelesaian penelitian ini antara lain:

1. Mengumpulkan informasi mengenai alur antrian pelayanan pasien yang terjadi di Rumah Sakit Leimena
2. Mengkaji informasi yang telah diperoleh pada langkah sebelumnya
3. Menjabarkan hasil kajian dalam bentuk proposal skripsi
4. Membentuk bagan alur sistem antrian pelayanan pasien BPJS
5. Mengkonstruksi bentuk model petri net sistem antrian pelayanan pasien di Rumah Sakit Leimena
6. Membentuk model aljabar max-plus dari petri net yang telah diperoleh.

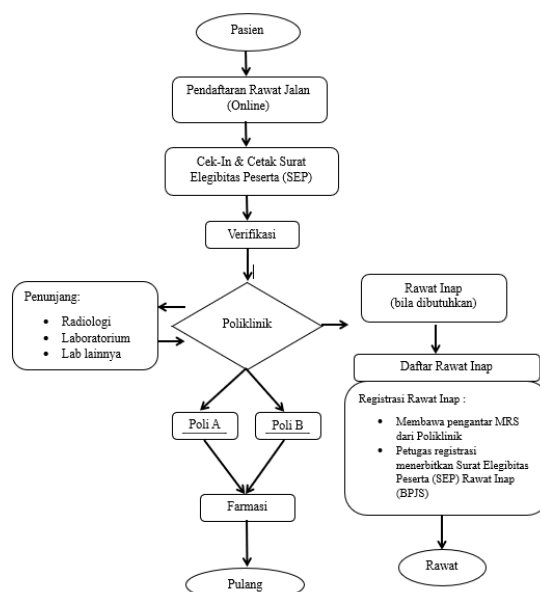
3. Pembahasan

3.1. Model Petri Net Sistem Antrian Pelayanan BPJS

Berdasarkan hasil observasi dan wawancara yang telah dilakukan, analisis dalam penelitian ini dilakukan dengan menghitung beberapa parameter utama yang mempengaruhi kinerja sistem antrian, yaitu rata-rata waktu kedatangan, waktu tunggu sebelum dilayani, dan waktu pelayanan. Rata-rata waktu kedatangan

dihitung untuk mengetahui seberapa sering pasien tiba dalam sistem antrian, yang berpengaruh pada tingkat kepadatan antrian. Waktu tunggu sebelum dilayani mencerminkan durasi yang harus dihabiskan pasien dalam antrian sebelum mendapatkan pelayanan, yang menjadi indikator efisiensi sistem. Sementara itu, waktu pelayanan mengacu pada durasi yang dibutuhkan oleh petugas dalam memberikan layanan kepada pasien. Perhitungan terhadap parameter-parameter tersebut dilakukan terutama pada periode jam sibuk guna memperoleh gambaran yang lebih akurat mengenai tingkat efisiensi pelayanan. Dengan demikian, hasil analisis ini diharapkan dapat menjadi dasar dalam mengevaluasi serta mengoptimalkan sistem antrian agar pelayanan dapat berjalan lebih efektif dan efisien.

Hasil wawancara yang dilakukan di Rumah Sakit Umum Leimena, waktu tunggu setiap pasien di loket pendaftaran BPJS bervariasi tergantung pada jumlah pasien yang datang serta jumlah petugas yang melayani. Pada kondisi normal, dengan rata-rata kedatangan pasien sebanyak 2 hingga 3 orang setiap 5 menit dan asumsi waktu pelayanan rata-rata sekitar 10 hingga 20 menit per pasien di satu loket, maka pasien yang baru tiba diperkirakan harus menunggu sekitar 15 hingga 20 menit sebelum mendapatkan pelayanan, tergantung panjang antrian yang terbentuk sebelumnya. Namun, pada saat jam sibuk, di mana jumlah kedatangan pasien meningkat menjadi sekitar 3 hingga 5 orang setiap 5 menit atau sekitar 15 hingga 25 orang per jam, waktu tunggu mengalami peningkatan yang cukup signifikan. Jika hanya terdapat satu loket pendaftaran yang beroperasi, pasien yang datang pada puncak antrian berpotensi mengalami waktu tunggu sekitar 30 hingga 60 menit sebelum dilayani. Sebaliknya, apabila terdapat lebih dari satu loket pelayanan, maka waktu tunggu dapat berkurang secara proporsional, berkisar antara 15 hingga 30 menit, tergantung pada efisiensi pelayanan yang diberikan. Dan waktu pasien menunggu antrian poli di lab secara medis di tiap poli dapat memakan waktu 180-280 menit setiap pasien. Dan waktu pasien dilayani di lab juga dapat memakan waktu hingga 120 menit. Selain itu, faktor lain seperti ketepatan waktu petugas dalam menangani pasien, kesiapan pasien dalam menyediakan dokumen administratif, serta sistem antrian yang diterapkan juga mempengaruhi durasi waktu tunggu. Dengan demikian, waktu tunggu pasien di Rumah Sakit Umum Leimena sangat dipengaruhi oleh berbagai faktor, dan pada kondisi tertentu dapat mengalami peningkatan yang signifikan terutama pada jam-jam sibuk. Berikut ini diagram alir yang menggambarkan alur sistem pelayanan pasien di Rumah Sakit Umum Pusat Leimena, Kota Ambon:



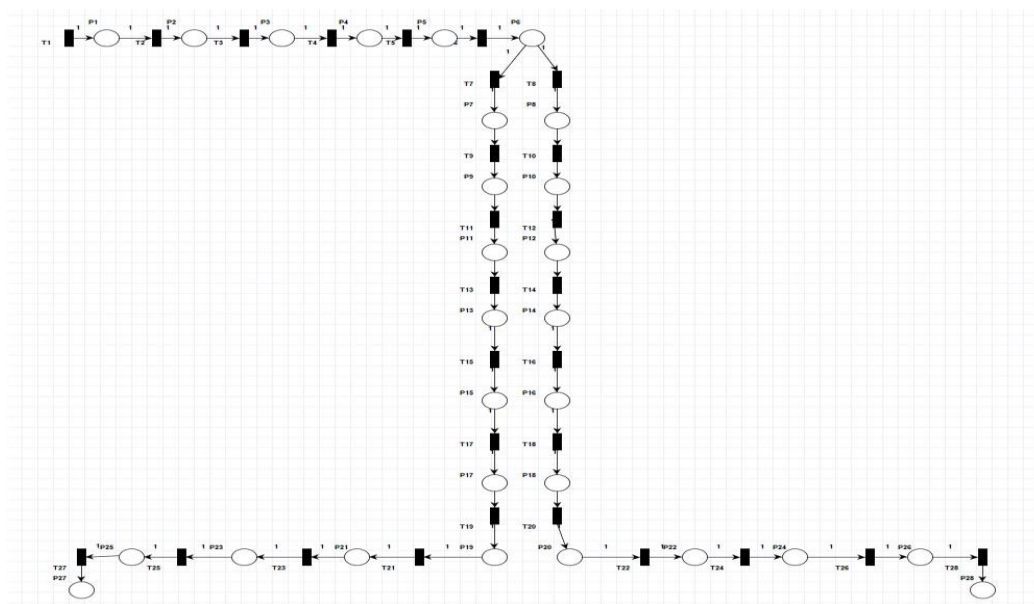
Gambar 1. Magnetization as a function of applied field.

Dari alur sistem pelayanan pasien BPJS di RS Leimena yang telah dikaji, bentuk model Petri Net yang diperoleh adalah Petri Net dengan jumlah place sebanyak 28 buah places dan jumlah transition sebanyak 28

buah transitions. Model ini dirancang untuk merepresentasikan seluruh tahapan layanan mulai dari kedatangan pasien, proses pendaftaran, pemeriksaan di poliklinik, layanan laboratorium, hingga pelayanan farmasi dan kepulangan pasien. Setiap place merepresentasikan kondisi atau status dalam sistem (misalnya pasien sedang menunggu, pasien sedang dilayani), sedangkan transition merepresentasikan peristiwa atau perubahan status yang terjadi (seperti pasien mulai diperiksa atau pasien selesai diperiksa).

Pembangunan model Petri Net ini dilakukan dengan bantuan perangkat lunak PIPE v4.3.0, yang merupakan salah satu software populer untuk simulasi dan analisis model Petri Net. Dengan software ini, proses pemodelan menjadi lebih sistematis dan visualisasi dari dinamika sistem antrian dapat terlihat lebih jelas, sehingga memudahkan dalam interpretasi alur proses pelayanan di rumah sakit.

Berikut gambar petri net yang di peroleh:



Gambar 4. 1 Model Petri Net Sistem Antrian Pelayanan BPJS

Keterangan :

- p_1 = Pasien datang ke rumah sakit
- p_2 = Pasien antri pendaftaran
- p_3 = Idle/ Petugas pendaftaran
- p_4 = Pasien antri pengumpulan dan verifikasi berkas
- p_5 = Pelayanan pengumpulan berkas
- p_6 = Idle/Petugas verifikasi berkas
- p_7 = Pasien antri poli A
- p_8 = Pasien antri poli B
- p_9 = Idle/Petugas poli A
- p_{10} = Idle/Petugas poli B
- p_{11} = Pasien keluar dari poli A
- p_{12} = Pasien keluar dari poli B
- p_{13} = Pasien antri Lab dari poli A
- p_{14} = Pasien antri Lab dari poli B
- p_{15} = Idle/Petugas Lab poli A
- p_{16} = Idle/Petugas Lab poli B
- p_{17} = Pasien poli A keluar dari Lab
- p_{18} = Pasien poli B keluar dari Lab

- p_{19} = Pasien poli A antri farmasi
- p_{20} = Pasien poli B antri farmasi
- p_{21} = Idle/Petugas Farmasi poli A
- p_{22} = Idle/Petugas Farmasi poli B
- p_{23} = Pasien poli A menuju pintu keluar farmasi
- p_{24} = Pasien poli B menuju pintu keluar farmasi
- p_{25} = Pasien poli A menuju pintu keluar rumah sakit
- p_{26} = Pasien poli B menuju pintu keluar rumah sakit
- p_{27} = Pasien poli A keluar dari rumah sakit
- p_{28} = Pasien poli B keluar dari rumah sakit
- t_1 = Kedatangan Pasien ke rumah sakit
- t_2 = Mulai pelayanan pendaftaran pasien di rumah sakit
- t_3 = Selesai pendaftaran online
- t_4 = Pasien menuju pelayanan pengumpulan dan verifikasi berkas
- t_5 = Pasien mulai pelayanan pengumpulan dan verifikasi berkas
- t_6 = Pasien selesai pelayanan pengumpulan dan verifikasi berkas
- t_7 = Pasien menuju poli A yang akan dituju
- t_8 = Pasien menuju poli B yang akan dituju
- t_9 = Pasien mulai di poli A
- t_{10} = Pasien mulai di poli B
- t_{11} = Pasien selesai dilayani di poli A
- t_{12} = Pasien selesai dilayani di poli B
- t_{13} = Pasien poli A menuju antrian Lab
- t_{14} = Pasien poli B menuju antrian Lab
- t_{15} = Pasien poli A mulai dilayani di Lab
- t_{16} = Pasien poli B mulai dilayani di Lab
- t_{17} = Pasien poli A selesai dilayani di Lab
- t_{18} = Pasien poli B selesai dilayani di Lab
- t_{19} = Pasien poli A menuju farmasi
- t_{20} = Pasien poli B menuju farmasi
- t_{21} = Pasien poli A mulai dilayani di farmasi
- t_{22} = Pasien poli B mulai dilayani di farmasi
- t_{23} = Pasien poli A selesai dilayani di farmasi
- t_{24} = Pasien poli B selesai dilayani di farmasi
- t_{25} = Pasien poli A keluar dari farmasi
- t_{26} = Pasien poli B keluar dari farmasi
- t_{27} = Pasien poli A pulang
- t_{28} = Pasien poli B pulang

3.2. MODEL ALJABAR MAX-PLUS SISTEM ANTRIAN PELAYANAN BPJS

Dalam sistem Petri Net yang dilengkapi dengan informasi waktu, pendekatan aljabar Max-Plus digunakan sebagai kerangka matematis untuk menganalisis dinamika waktu dalam sistem pelayanan. Pendekatan ini memungkinkan representasi linier dari sistem antrian yang bersifat nonlinier dalam aljabar biasa. Secara khusus, dalam model Petri Net yang merepresentasikan sistem antrian pelayanan BPJS di Rumah Sakit Umum Pusat Leimena, dua jenis peubah digunakan untuk mengembangkan model dalam aljabar Max-Plus, yaitu peubah waktu dan peubah durasi atau lama waktu. Peubah waktu menggambarkan kapan suatu kejadian dalam sistem antrian terjadi, seperti waktu kedatangan pasien, waktu dimulainya suatu layanan, serta waktu ketika layanan selesai dilakukan. Sementara itu, peubah durasi digunakan untuk

menunjukkan berapa lama suatu aktivitas berlangsung, misalnya lamanya proses pendaftaran, waktu yang dibutuhkan pasien untuk menuju poli, durasi pemeriksaan di poli, waktu tunggu di laboratorium, serta lamanya proses pelayanan di farmasi.

Pendekatan ini diawali dengan melakukan pengidentifikasian terhadap semua transisi yang terjadi dalam sistem antrian berdasarkan hasil observasi dan diagram alir sistem pelayanan. Untuk setiap transisi tersebut, ditentukan dua komponen utama. Misalnya, waktu kedatangan pasien ke rumah sakit dinotasikan dengan $a(k)$, sedangkan lama waktu kedatangan dinotasikan dengan $V_{a,k}$.

Berikut peubah waktu yang dibutuhkan dalam pemodelan max-plus

$a(k)$ = Waktu kedatangan pasien di rumah sakit saat ke- k

$b(k)$ = Waktu mulai pelayanan pendaftaran online saat ke- k

$c(k)$ = Waktu selesai pendaftaran online saat ke- k

$d(k)$ = Waktu pasien menuju pelayanan pengumpulan dan verifikasi berkas saat ke- k

$e(k)$ = Waktu mulai pelayanan pengumpulan dan verifikasi berkas saat ke- k

$f(k)$ = Waktu selesai pengumpulan dan verifikasi berkas saat ke- k

$g(k)$ = Waktu pasien menuju poli A yang akan dituju saat ke- k

$h(k)$ = Waktu pasien menuju poli B yang akan dituju saat ke- k

$i(k)$ = Waktu mulai pasien di poli A saat ke- k

$j(k)$ = Waktu mulai pasien di poli B saat ke- k

$k(k)$ = Waktu pasien selesai dilayani di poli A saat ke- k

$l(k)$ = Waktu pasien selesai dilayani di poli B saat ke- k

$m(k)$ = Waktu pasien poli A menuju antrian Lab saat ke- k

$n(k)$ = Waktu pasien poli B menuju antrian Lab saat ke- k

$o(k)$ = Waktu pasien poli A mulai dilayani di Lab saat ke- k

$p(k)$ = Waktu pasien poli B mulai dilayani di Lab saat ke- k

$q(k)$ = Waktu pasien poli A selesai dilayani di Lab saat ke- k

$r(k)$ = Waktu pasien poli B selesai dilayani di Lab saat ke- k

$s(k)$ = Waktu pasien poli A menuju farmasi saat ke- k

$t(k)$ = Waktu pasien poli B menuju farmasi saat ke- k

$u(k)$ = Waktu pasien poli A mulai dilayani farmasi saat ke- k

$v(k)$ = Waktu pasien poli B mulai dilayani farmasi saat ke- k

$w(k)$ = Waktu pasien poli A selesai dilayani farmasi saat ke- k

$x(k)$ = Waktu pasien poli B selesai dilayani farmasi saat ke- k

$y(k)$ = Waktu pasien poli A keluar dari farmasi saat ke- k

$z(k)$ = Waktu pasien poli B keluar dari farmasi saat ke- k

$aa(k)$ = Waktu pasien poli A pulang saat ke- k

$bb(k)$ = Waktu pasien poli B pulang saat ke- k

Untuk peubah-peubah yang menunjukkan lama waktu sebagai berikut.

$V_{a,k}$ = Lama kedatangan pasien di rumah sakit saat ke- k

$V_{c,k}$ = Lama pasien selesai pendaftaran online saat ke- k

$V_{d,k}$ = Lama pasien menuju pelayanan pengumpulan dan verifikasi berkas saat ke- k

$V_{e,k}$ = Lama pasien mulai pelayanan pengumpulan dan verifikasi berkas saat ke- k

$V_{f,k}$ = Lama pasien selesai pengumpulan dan verifikasi berkas saat ke- k

$V_{g,k}$ = Lama pasien menuju poli A yang akan dituju saat ke- k

$V_{h,k}$ = Lama pasien menuju poli B yang akan dituju saat ke- k

$V_{k,k}$ = Lama pasien selesai dilayani di poli A saat ke- k

$V_{l,k}$ = Lama pasien selesai dilayani di poli B saat ke- k

$V_{m,k}$ = Lama pasien poli A menuju antrian Lab saat ke- k

$V_{n,k}$ = Lama pasien poli B menuju antrian Lab saat ke- k

$V_{q,k}$ = Lama pasien poli A selesai dilayani di Lab saat ke-k

$V_{r,k}$ = Lama pasien poli B selesai dilayani di Lab saat ke-k

$V_{s,k}$ = Lama pasien poli A menuju farmasi saat ke-k

$V_{t,k}$ = Lama pasien poli B menuju farmasi saat ke-k

$V_{w,k}$ = Lama pasien poli A selesai dilayani farmasi saat ke-k

$V_{x,k}$ = Lama pasien poli B selesai dilayani farmasi saat ke-k

$V_{y,k}$ = Lama pasien poli A keluar dari farmasi saat ke-k

$V_{z,k}$ = Lama pasien poli B keluar dari farmasi saat ke-k

$V_{aa,k}$ = Lama pasien poli A pulang saat ke-k

$V_{bb,k}$ = Lama pasien poli B pulang saat ke-k

Model aljabar Max-Plus kemudian dirumuskan berdasarkan hubungan antar kejadian tersebut. Setiap kejadian baru dalam sistem tidak terjadi secara independen, melainkan bergantung pada kejadian-kejadian sebelumnya. Misalnya, waktu dimulainya pelayanan pendaftaran online tidak dapat terjadi sebelum pasien tiba dan loket tersedia.

Dengan menggunakan prinsip dasar dari aljabar Max-Plus, yaitu operasi maksimum dan penjumlahan, semua hubungan waktu dalam sistem antrian dituliskan dalam bentuk persamaan. Beberapa model yang diperoleh diantaranya:

1. Waktu pasien selesai pendaftaran online ($c(k)$) merupakan hasil dari penjumlahan lama selesai pendaftaran online dengan dinotasikan dengan $V_{c,k}$ dan ($b(k)$) dengan waktu mulai pendaftaran online sehingga diperoleh $c(k) = V_{c,k} \otimes b(k)$
2. Waktu mulai pelayanan pendaftaran online dinotasikan dengan $b(k)$ tergantung pada waktu pasien sebelumnya selesai pendaftaran oleh karena itu $b(k)$ diperoleh dari maksimal antara waktu kedatangan pasien dirumah sakit $a(k)$ dengan waktu selesai pasien sebelumnya pendaftaran online $c(k)$ sehingga diperoleh $b(k) = a(k) \oplus c(k-1)$.

Dengan menggunakan pola yang sama, diperoleh model aljabar max-plus sebagai berikut:

- $a(k) = V_{a,k} \otimes a(k-1)$
- $b(k) = a(k) \oplus c(k-1) = (V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1)$
- $c(k) = V_{c,k} \otimes b(k) = V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1))$
- $d(k) = V_{d,k} \otimes c(k) = V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1)))$
- $e(k) = V_{e,k} \otimes d(k) = V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1))))$
- $f(k) = V_{f,k} \otimes e(k) = V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1)))))$
- $g(k) = V_{g,k} \otimes f(k) = V_{g,k} \otimes (V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1)))))$
- $h(k) = V_{h,k} \otimes f(k) = V_{h,k} \otimes (V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1)))))$
- $i(k) = g(k) \oplus k(k-1) = V_{g,k} \otimes (V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1))))) \oplus k(k-1)$
- $j(k) = h(k) \oplus l(k-1) = V_{h,k} \otimes (V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1))))) \oplus l(k-1)$
- $k(k) = V_{k,k} \otimes i(k) = V_{k,k} \otimes (V_{g,k} \otimes (V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1))))) \oplus k(k-1)$
- $l(k) = V_{l,k} \otimes j(k) = V_{l,k} \otimes (V_{h,k} \otimes (V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1))))) \oplus l(k-1)$
- $m(k) = V_{m,k} \otimes k(k) = V_{m,k} \otimes ((V_{k,k} \otimes (V_{g,k} \otimes (V_{f,k} \otimes (V_{e,k} \otimes (V_{d,k} \otimes (V_{c,k} \otimes ((V_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus c(k-1))))) \oplus k(k-1)))$

- [illegible]

Menurut model diatas, diperoleh SPL sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a(k) \\ c(k) \\ f(k) \\ k(k) \\ l(k) \\ q(k) \\ r(k) \\ w(k) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ C_1 & C_2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ F_1 & F_2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ K_1 & K_2 & \varepsilon & K_4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ L_1 & L_2 & \varepsilon & \varepsilon & L_5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ Q_1 & Q_2 & \varepsilon & Q_4 & \varepsilon & Q_6 & Q_7 & \varepsilon & \varepsilon \\ R_1 & R_2 & \varepsilon & \varepsilon & R_5 & R_6 & R_7 & \varepsilon & \varepsilon \\ W_1 & W_2 & \varepsilon & W_4 & \varepsilon & W_6 & W_7 & W_8 & W_9 \\ X_1 & X_2 & \varepsilon & \varepsilon & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a(k-1) \\ c(k-1) \\ f(k-1) \\ k(k-1) \\ l(k-1) \\ q(k-1) \\ r(k-1) \\ w(k-1) \\ x(k-1) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan data observasi yang kemudian dinyatakan dalam peubah-peubah lama waktu, diperoleh :

$$\begin{array}{lllll} V_{a,k} = 10 & V_{g,k} = 8 & V_{l,k} = 20 & V_{q,k} = 100 & V_{v,k} = 65 \\ V_{c,k} = 10 & V_{h,k} = 10 & V_{m,k} = 5 & V_{r,k} = 180 & V_{w,k} = 15 \\ V_{d,k} = 2 & V_{i,k} = 25 & V_{n,k} = 4 & V_{s,k} = 5 & V_{x,k} = 20 \\ V_{e,k} = 2 & V_{j,k} = 32 & V_{o,k} = 130 & V_{t,k} = 7 & \\ V_{f,k} = 10 & V_{k,k} = 15 & V_{p,k} = 200 & V_{u,k} = 40 & \end{array}$$

Dengan mensubstitusikan nilai tersebut diperoleh nilai sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a(k) \\ c(k) \\ f(k) \\ k(k) \\ l(k) \\ q(k) \\ r(k) \\ w(k) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 34 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 57 & 47 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 64 & 54 & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 162 & 152 & \varepsilon & 120 & \varepsilon & 100 & 100 & \varepsilon & \varepsilon \\ 248 & 238 & \varepsilon & \varepsilon & 204 & 180 & 180 & \varepsilon & \varepsilon \\ 182 & 172 & \varepsilon & 140 & \varepsilon & 120 & 15 & 15 & 15 \\ 275 & 265 & \varepsilon & \varepsilon & 231 & 20 & 207 & 20 & 20 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a(k-1) \\ c(k-1) \\ f(k-1) \\ k(k-1) \\ l(k-1) \\ q(k-1) \\ r(k-1) \\ w(k-1) \\ x(k-1) \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh model dengan menggunakan pendekatan aljabar Max-Plus, selanjutnya akan dilakukan simulasi untuk pasien ke-0 hingga pasien ke-3 ($k = 0, 1, 2, 3$) dalam bentuk matriks waktu layanan. Matriks ini menyajikan waktu terjadinya setiap tahapan layanan dalam sistem antrian pasien BPJS di Rumah Sakit Umum Pusat Leimena. Untuk pasien ke-0 ($k = 0$), seluruh tahapan layanan dimulai dari waktu nol, karena pasien pertama dianggap sebagai referensi awal sistem (keadaan dasar).

yaitu:

$$\begin{bmatrix} a(k) \\ c(k) \\ f(k) \\ k(k) \\ l(k) \\ q(k) \\ r(k) \\ w(k) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Selanjutnya, untuk pasien ke-1 ($k = 1$) dan seterusnya, nilai-nilai dalam matriks akan berubah mengikuti alur dan durasi layanan yang telah ditentukan oleh parameter waktu dari pasien sebelumnya. Setiap entri dalam matriks mencerminkan waktu ketika masing-masing tahapan layanan diselesaikan. Nilai-nilai tersebut merupakan hasil dari operasi max-plus antara waktu sebelumnya dan durasi layanan yang ditetapkan.

$$\begin{bmatrix} a(1) \\ c(1) \\ f(1) \\ k(1) \\ l(1) \\ q(1) \\ r(1) \\ w(1) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 34 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 57 & 47 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 64 & 54 & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 162 & 152 & \varepsilon & 120 & \varepsilon & 100 & 100 & \varepsilon & \varepsilon \\ 248 & 238 & \varepsilon & \varepsilon & 204 & 180 & 180 & \varepsilon & \varepsilon \\ 182 & 172 & \varepsilon & 140 & \varepsilon & 120 & 15 & 15 & 15 \\ 275 & 265 & \varepsilon & \varepsilon & 231 & 20 & 207 & 20 & 20 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 34 \\ 57 \\ 64 \\ 162 \\ 248 \\ 182 \\ 275 \end{bmatrix}$$

2. Untuk pasien ke-2 ($k = 2$) hasil simulasi model dengan pendekatan aljabar Max-Plus dituliskan dalam bentuk matriks bertingkat sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a(2) \\ c(2) \\ f(2) \\ k(2) \\ l(2) \\ q(2) \\ r(2) \\ w(2) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 34 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 57 & 47 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 64 & 54 & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 162 & 152 & \varepsilon & 120 & \varepsilon & 100 & 100 & \varepsilon & \varepsilon \\ 248 & 238 & \varepsilon & \varepsilon & 204 & 180 & 180 & \varepsilon & \varepsilon \\ 182 & 172 & \varepsilon & 140 & \varepsilon & 120 & 15 & 15 & 15 \\ 275 & 265 & \varepsilon & \varepsilon & 231 & 20 & 207 & 20 & 20 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 34 \\ 57 \\ 64 \\ 162 \\ 248 \\ 182 \\ 275 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 44 \\ 72 \\ 84 \\ 262 \\ 428 \\ 275 \\ 455 \end{bmatrix}$$

3. Untuk pasien ke-3 ($k = 3$) hasil simulasi model dengan pendekatan aljabar Max-Plus dituliskan dalam bentuk matriks bertingkat sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a(3) \\ c(3) \\ f(3) \\ k(3) \\ l(3) \\ q(3) \\ r(3) \\ w(3) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 34 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 57 & 47 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 64 & 54 & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 162 & 152 & \varepsilon & 120 & \varepsilon & 100 & 100 & \varepsilon & \varepsilon \\ 248 & 238 & \varepsilon & \varepsilon & 204 & 180 & 180 & \varepsilon & \varepsilon \\ 182 & 172 & \varepsilon & 140 & \varepsilon & 120 & 15 & 15 & 15 \\ 275 & 265 & \varepsilon & \varepsilon & 231 & 20 & 207 & 20 & 20 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 44 \\ 72 \\ 84 \\ 262 \\ 428 \\ 275 \\ 455 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 54 \\ 87 \\ 104 \\ 428 \\ 608 \\ 455 \\ 635 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil simulasi model aljabar max plus diatas, maka diperoleh untuk pasien pertama ($k = 1$) yaitu waktu kedatangan pasien di rumah sakit $a(1)$ yaitu 10 menit, waktu selesai pendaftaran online $c(1)$ yaitu 20 menit, waktu selesai pengumpulan dan verifikasi berkas $f(1)$ yaitu 34 menit, waktu pasien selesai dilayani di poli A $k(1)$ yaitu 57 menit, waktu pasien selesai dilayani di poli B $l(1)$ yaitu 64 menit, waktu pasien poli A selesai dilayani di Lab $q(1)$ yaitu 162 menit, waktu pasien poli B selesai dilayani di Lab $r(1)$ yaitu 248 menit, waktu pasien poli A selesai dilayani farmasi $w(1)$ yaitu 182 menit dan waktu pasien poli B selesai dilayani farmasi $x(1)$ yaitu 275 menit.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dan simulasi yang telah dilakukan, diperoleh bahwa penggunaan Petri Net sangat efektif untuk menganalisis sistem antrian pada pelayanan pasien BPJS di Rumah Sakit Umum Pusat Leimena Kota Ambon. Melalui pemodelan Petri Net, seluruh alur pelayanan pasien — mulai dari pendaftaran, verifikasi berkas, pemeriksaan di poliklinik, pelayanan laboratorium, hingga farmasi — dapat direpresentasikan secara sistematis dan mudah dipahami. Model ini membantu mengidentifikasi titik-titik kemacetan yang menyebabkan waktu tunggu panjang dalam sistem pelayanan rumah sakit.

Selanjutnya, model aljabar Max-Plus yang dibangun dari hasil pemodelan Petri Net mampu menggambarkan keterkaitan waktu antar setiap tahap pelayanan secara matematis. Dengan pendekatan ini,

diperoleh estimasi waktu tunggu dan waktu pelayanan pasien secara lebih akurat. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pasien pertama ($k = 1$) membutuhkan waktu total sekitar 275 menit untuk menyelesaikan seluruh tahapan pelayanan, mulai dari kedatangan hingga selesai pelayanan farmasi.

Selain itu, hasil simulasi juga memperlihatkan bahwa penambahan jumlah loket pendaftaran dan petugas laboratorium dapat mengurangi waktu tunggu pasien secara signifikan, terutama pada jam sibuk. Hal ini membuktikan bahwa integrasi antara Petri Net dan aljabar Max-Plus tidak hanya dapat digunakan untuk menganalisis sistem antrian, tetapi juga dapat dijadikan dasar dalam pengambilan keputusan untuk mengoptimalkan efisiensi dan kualitas pelayanan pasien BPJS di rumah sakit.

Referensi

- [1] Subiono. (2013). *Aljabar Max plus dan Terapannya*. Surabaya:Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [2] Maure, O. P., Ningsi, G. P., & Nay, F. A. (2021). Pemodelan Sistem Antrian Pasien Rawat Jalan Menggunakan Petri Net Dan Aljabar Max-Plus: Studi Kasus Rsu Di Yogyakarta. *Leibniz: Jurnal Matematika*, 1(2), 1-11.
- [3] Hilda, H., Kaseng, S., & Saleh, H. H. M. (2018). Analisis Antrian Pelayanan Nasabah Pada PT Bank Syariah Mandiri Cabang Bungku. *Jurnal Ilmu Manajemen Universitas Tadulako (JIMUT)*, 4(3), 201-210.
- [4] Hardiyanti, S., Yuniawati, I., & Yustita, A. (2017). Bentuk Petri Net dan Model Aljabar Max Plus Pada Sistem Pelayanan Pasien Rawat Jalan Rumah Sakit Al Huda Genteng, Banyuwangi. *UJMC Unisda Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(2), 1-8.
- [5] Widiatmoko, A. (2017). *Analisis Kualitas Pelayanan Program Jaminan Kesehatan Nasional BPJS Kesehatan*. Universitas Diponegoro.
- [6] Rahayu, L., & Sugiarti, I. (2021). Analisis prosedur klaim BPJS kesehatan di rumah sakit. *Indonesian Journal of Health Information Management (IJHIM)*, 1(2).
- [7] Suryanto, Hikmawan. "Penyebab Ketidaklengkapan Berkas Klaim Pembiayaan Pelayanan Kesehatan Penduduk Miskin: Pendekatan Kualitatif." *Jengala: Jurnal Riset Pengembangan dan Pelayanan Kesehatan* 1, no. 1 (2022): 1-8.
- [8] Khotimah, S. H., A'yun, Q. Q., & Wasono, W. (2024). Pemodelan Sistem Antrean Pelayanan Pembayaran Pajak Kendaraan Bermotor Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus di Samsat MT Haryono Samarinda. *Journal of Mathematics Education and Science*, 7(1), 65-75.
- [9] Osniman, M., & Marcellinus, R. (2019). Model Aljabar Max-Plus Pada Sistem Antrian Pelayanan Penerbitan Surat Izin Usaha Perdagangan Bahan Berbahaya. *Asimtot: Jurnal Kependidikan Matematika*, 1(2), 139-146.
- [10] Octavia. M. (2022). *Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Aljabar Max-Plus (Studi kasus: Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang)*. Bandar Lampung:Universitas Lampung.