TENSOR
Pure and Applied Mathematics Journal

September 2020 | Vol. 1 | No. 2 Halaman 77–82
p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

Ideal Dalam Semigrup Ternari Komutatif

Noverly Cloren Pattinasarany[1*], Elvinus Richard Persulessy[2*]
[1] Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Pattimura University, Jalan Ir. M. Putuhena, Kampus Poka – Unpatti, Ambon, Indonesia.
Email: noverlypatti@gmail.com
[2] Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Pattimura University, Jalan Ir. M. Putuhena, Kampus Poka – Unpatti, Ambon, Indonesia.
Email : er.persulessy@gmail.com

Manuscript submitted : Oktober 2020
Accepted for publication : Desember 2020

Abstract: Algebra is a branch of mathematics that deals with mathematical. In algebra, the properties possessed by an operation that can be performed on the object (like addition and multiplication) are studied. There are many theories such as groups, abelian groups, and semigroups. In semigroups we only use binary operations. In this paper we study some semigroups using ternary operation. We investigate the structure of the ideal in a semigroup commutative ternary. So that we can find out the ideal structure in semigroup commutative fingers.

2010 Mathematical Subject Classification : 05C70, 05C78.
Key words: ideal in ternary semigroup comutative, semigroups , semigroup ternary, semigroup ternary comutative,

1. Pendahuluan

Aljabar merupakan salah satu cabang matematika yang berurusan dengan objek matematika (katakanlah bilangan yang tidak diketahui nilai persisnya) dan menggunakan lambang seperti x dan y untuk mempelajarinya. Dalam aljabar, sifat sifat yang dimiliki oleh operasi yang dapat dilakukan pada objek tersebut (bayangkan penjumlahan dan perkalian) dipelajari, kemudian menjadi “senjata” ketika kita berhadapan dengan suatu masalah terkait objek tersebut.

Struktur aljabar memainkan peran penting dalam matematika dengan berbagai aplikasi dalam banyak ilmu seperti fisika teoretis, ilmu komputer, teknik kontrol, ilmu informasi, teori pengkodean, ruang topologi dan sejenisnya. Dalam aljabar banyak menggunakan simbol (berupa huruf, notasi ataupun lambang) yang bertujuan untuk sarana penyederhanaan atau representasi. Dalam stuktur aljabar telah banyak teori yang dijumpai seperti grup, grup abelian, dan semigrup.

Semigrup adalah himpunan yang tak kosong dengan operasi biner $(*)$, yang bila operasi biner $(*)$ didefenisikan pada himpunan tersebut memenuhi dua aksioma yakni aksioma tertutup dan asosiatif. Dalam semigrup hanya digunakan operasi biner. Artikel ini semigrup dengan menggunakan operasi ternari. Teori ternari sistem aljabar diperkenalkan oleh D.H. Lehmer . Dia menyelidiki ternari tertentu sistem aljabar yang disebut triplex yang berubah menjadi kelompok ternari komutatif. Semigrup ternari adalah himpunan tak kosong yang diatur bersama dengan perkalian ternari yang asosiatif. untuk memahami apa itu semigrup ternari komutatif maka dalam makalah ini akan dibahas mengenai ideal dalam semigrup ternari komutatif.

2. Hasil dan Pembahasan

2.1 Triplex

Definisi 1. Kelas K dengan operasi antara kembar tiga unsur disebut triplex jika aksioma berikut berlaku.

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b \cdot c) \cdot d \cdot e &= d \cdot (a \cdot b \cdot c) \cdot e \\
&= d \cdot e \cdot (a \cdot b \cdot c) \\
&= (a \cdot b \cdot d) \cdot c \cdot e \\
&= (a \cdot b \cdot e) \cdot c \cdot d \\
&= (a \cdot c \cdot d) \cdot b \cdot e \\
&= (a \cdot c \cdot e) \cdot b \cdot d \\
&= (a \cdot d \cdot e) \cdot b \cdot c \\
&= (b \cdot c \cdot d) \cdot a \cdot e \\
&= (b \cdot c \cdot e) \cdot a \cdot d \\
&= (b \cdot d \cdot e) \cdot a \cdot c \\
&= (c \cdot d \cdot e) \cdot a \cdot b
\end{aligned}
$$

Sebagai cotoh jika diberikan $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, dengan operasi triplex terhadap penjumlahan, maka pada A berlaku

$$
\begin{aligned}
(1+2+3)+4+5 &= 4+(1+2+3)+5 \\
&= 4+5+(1+2+3) \\
&= 4+1+(5+3+2) \\
&= (2+3+4)+5+1 \\
&= (3+4+5)+1+2 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

2.2 Semigrup Ternari

Definisi 2.

Himpunan tak kosong S disebut semigrup ternari S jika dilengkapi operasi ternari $(*) : S \times S \times S \to S$ yang memenuhi sifat asosiatif yaitu untuk setiap a, b, c, d, e anggota S berlaku $(a * b * c) * d * e = a * (b * c * d) * e = a * b(c * d * e)$

Contoh 3. Diberikan Z^- adalah himpunan semua bilangan bulat negatif. Kemudian bersama dengan perkalian ternari biasa bilangan bulat negatif, Z^- membentuk semigrup ternari.

Contoh 4. Diberikan S adalah himpunan semua polinomial ganjil dalam satu variabel dengan koefisien integral negatif. HImpunan S membentuk semigrup ternari terhadap multiplikasi polinomial ternari.

Contoh 5. Diberikan S adalah himpunan semua bilangan real dan k adalah konstanta dalam S. Jika kita mendefinisikan perkalian ternari di S oleh $abc = a + b + c + k$ untuk semua $a, b, c \in S$, kemudian dengan perkalian ternari ini, S membentuk semigrup ternari.

Contoh 6. Diberikan Z adalah himpunan semua bilangan bulat dengan operasi ternari didefenisikan sebagai $a \times b \times c = abc$ dimana $a, b, c \in Z$ akan ditunjukan Z dengan operasi ternari tersebut merupakan semigrup ternari. Untuk menunjukan bahwa Z adalah semigrup ternari maka kita akan menunjukan bahwa Z dengan operasi ternari yang didefenisikan memenuhi sifat tertutup dan asosiatif

1. Tertutup

Untuk $x, y, z \in Z$, perhatikan bahwa $x \times y \times z = xyz$. Karena $x, y, z \in Z$, maka $x \times y \times z = xyz = n$, untuk suatu $n \in Z$. Maka sifat tertutup terpenuhi.

2. Asosiatif

Untuk $m, n, x, y, z \in Z$, dapat dilihat bahwa

$$
\begin{aligned}
(m \times n \times x) \times y \times z &= (mnx) \times y \times z \\
&= mnxyz \\
&= m \times (nxy) \times z \\
&= mnxyz \\
&= m \times n \times (xyz) \\
&= m \times n \times (\times x \times y \times z).
\end{aligned}
$$

Maka berlaku sifat asosiatif.

Karena kedua sifat tersebut telah terpenuhi maka Z dengan operasi ternari yang didefenisikan merupakan semigrup ternari.

Contoh 7. Diberikan himpunan G dengan elemen $a + \frac{b}{10}$ dengan $a, b \in Z$, dengan operasi ternari (+) himpunan ini merupakan semigrup ternari. Untuk menunjukan bahwa G merupakan semigrup ternari, maka pada G harus tertutup dan asosiatif

1. tertutup

Untuk $x, y, z \in G$ dengan $x = a + \frac{b}{10}, a, b \in Z$

$$y = c + \frac{d}{10}, c, d \in Z$$

$$z = e + \frac{f}{10}, e, f \in Z$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= \left(a + \frac{b}{10}\right) + \left(c + \frac{d}{10}\right) + (e + \frac{f}{10}) \\
&= a + \frac{b}{10} + c + \frac{d}{10} + e + \frac{f}{10} \\
&= a + c + e + \frac{b}{10} + \frac{d}{10} + \frac{f}{10} \\
&= a + c + e + \frac{b+d+f}{10}
\end{aligned}
$$

Misalkan $m = a + c + e$ karena $a, c, e \in Z$, maka $m \in Z$.

Misalkan $n = b + d + f$ karena $b, d, f \in$, maka $n \in Z$

Karena memenuhi syarat keanggotaan dari G maka sifat tertutup terpenuhi

2. Asosiatif

Untuk $x, y, z, p, q \in G$ dengan $x = a + \frac{b}{10}, a, b \in Z$

$$y = c + \frac{d}{10}, c, d \in Z$$

$$z = e + \frac{f}{10}, e, f \in Z$$

$$p = g + \frac{h}{10}, g, h \in Z$$

$$q = i + \frac{j}{10}, i, j \in Z$$

Diproleh,

$$
\begin{aligned}
(x + y + z) + p + q &= \left(\left(a + \frac{b}{10}\right) + \left(c + \frac{d}{10}\right) + \left(e + \frac{f}{10}\right)\right) + \left(g + \frac{h}{10}\right) + \left(i + \frac{j}{10}\right) \\
&= \left(\left(\frac{10a}{10} + \frac{b}{10}\right) + \left(\frac{10c}{10} + \frac{d}{10}\right) + \left(\frac{10e}{10} + \frac{f}{10}\right)\right) + \left(\frac{10g}{10} + \frac{h}{10}\right) + \left(\frac{10i}{10} + \frac{j}{10}\right) \\
&= \frac{10a}{10} + \frac{b}{10} + \frac{10c}{10} + \frac{d}{10} + \frac{10e}{10} + \frac{f}{10} + \frac{10g}{10} + \frac{h}{10} + \frac{10i}{10} + \frac{j}{10} \\
&= \frac{10a + b + 10c + d + 10e + f + 10g + h + 10j + j}{10} \\
&= \left(\frac{10a}{10} + \frac{b}{10}\right) + \frac{10c + d + 10e + f + 10g + h + 10j + j}{10} \\
&= \left(\frac{10a}{10} + \frac{b}{10}\right) + \left(\frac{10c}{10} + \frac{d}{10}\right) + \left(\frac{10e + f + 10g + h + 10j + j}{10}\right) \\
&= \left(a + \frac{b}{10}\right) + \left(c + \frac{d}{10}\right) + \left(\left(\frac{10e}{10} + \frac{f}{10}\right) + \left(\frac{10g}{10} + \frac{h}{10}\right) + \left(\frac{10i}{10} + \frac{j}{10}\right)\right) \\
&= x + y + \left(\left(e + \frac{f}{10}\right) + \left(g + \frac{h}{10}\right) + \left(i + \frac{j}{10}\right)\right) \\
&= x + y + (z + p + q)
\end{aligned}
$$

Maka berlaku sifat asosiatif

Karena kedua aksioma telah terpenuhi maka G adalah semigrup ternari.

2.3 Ideal dalam Semigrup Ternari

Definisi 8. Semigrup ternari S dikatakan komutatif jika $x_1\, x_2\, x_3 = x_{\sigma(1)}\, x_{\sigma(2)}\, x_{\sigma(3)}$ untuk setiap permutasi σ $dari$ $\{1, 2, 3\}$ dan $x_1\, x_2\, x_3 \in$ S, berlaku

$$x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3,$$

$$x_1 x_2 x_3 = x_1 x_3 x_2,$$

$$x_1x_2x_3 = x_2x_1x_3,$$
$$x_1x_2x_3 = x_2x_3x_1,$$
$$x_1x_2x_3 = x_3x_1x_2,$$
$$x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1,$$

atau dapat dinotasikan dengan

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

Contoh 9. Diberikan Z adalah himpunan semua bilangan bulat dengan operasi ternari didefenisikan sebagai $a \times b \times c = abc$ dengan $a, b, c \in Z$. Karena Z dengan operasi ternari tersebut merupakan himpunan semigrup ternari. Lebih lanjut, Z merupakan semigrup ternari komutatif

Definisi 10. Subset tidak kosong I dari semigrup ternari S disebut

i. Ideal kiri S jika SSI ⊆ I
ii. Ideal lateral untuk S jika SIS ⊆ I
iii. Ideal kanan dari S jika ISS ⊆ I
iv. Ideal dari S jika I adalah ideal kiri, ideal kanan, ideal lateral dari S. Suatu ideal I dari semigrup ternary S disebut ideal proper jika $I \neq S$.

Contoh 11. Diberikan Z^- adalah himpunan semua bilangan bulat negatif. Kemudian bersama dengan perkalian ternari biasa bilangan bulat negatif, Z^- membentuk semigrup ternari, diberikan $A \subseteq Z^-$, dengan A adalah himpunan semua bilangan bulat negatif yang kurang dari (-1), A merupakan ideal proper dari Z^-

Contoh 11. diberikan Z adalah himpunan bilangan bulat kemudian bersama dengan operasi perkalian ternari biasa, maka Z merupakan semigrup ternari, kemudian diberikan $2Z \subseteq Z$. Lebih lanjut $2Z$ merupakan ideal dari Z, karena memenuhi

1. Ideal kiri Z jika $ZZ2Z \subseteq 2Z$
2. Ideal lateral untuk Z jika $Z2ZZ \subseteq 2Z$
3. Ideal kanan dari S jika $2ZZZ \subseteq 2Z$

Proposisi 12. Diberikan S adalah semigrup ternari dan suatu $a \in S$, maka berlaku sifat-sifat di bawah ini:

i. Ideal kiri dihasilkan oleh $'a'$ diberikan oleh $< a > l = SSa \cup \{a\}$
ii. Ideal kanan dihasilkan oleh $'a'$ diberikan oleh $< a > r = aSS \cup \{a\}$
iii. Ideal lateral yang dihasilkan oleh $'a'$ diberikan oleh $< a > m = SaS \cup SSaSS \cup \{a\}$
iv. Ideal dihasilkan oleh $'a'$ diberikan oleh $< a > = SSa \cup aSS \cup SaS \cup SSaSS \cup \{a\}$.

Definisi 13. Suatu ideal I dari semigrup ternari S disebut idempoten jika $I^3 = I$.

3. Kesimpulan

Himpunan bilangan bulat positif Z dengan operasi ternari yang didefenisikan sebagai $\times b \times c = abc$ dengan $a, b, c \in Z$, merupakan semigrup ternari komutatif. Kita dapat membentuk ideal dalam semigrup ternari komutatif. Lebih lanjut, suatu ideal I dari semigrup ternari S disebut idempoten jika $I^3 = I$

References

[1] T. K. Dutta, S. Kar and B. K. K. Maity. (2019). On Ideals In Regular Ternary Semigroups, Discussiones Mathematicae. *General Algebra and Applications*. 147 (28) (2008) 147-159
[2] D. H. Lehmer. (1932). A ternary analogue of abelian groups, *Amer. jour. Math*., 39, 329 -338
[3] J. M. Howie. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, Oxford.