TENSOR Pure and Applied Mathematics Journal
September 2020 | Vol. 1 | No. 2 Halaman 57–64
p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

Pengaruh Ekstrapolasi Richardson Terhadap Keakuratan Solusi Numerik Persamaan Konduksi Panas

Rofila El Maghfiroh[1*], Rif'atul Khusniah[2], Muhammad Badaruz Zaman[3]
[1] Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang, Jl. Soekarno-Hatta, Malang, Indonesia.
Email: rofila.elma@gmail.com
[2] Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang, Jl. Soekarno-Hatta, Malang, Indonesia.
Email: rifatulkhusniahkurniawan231@gmail.com
[3] Jurusan Teknik Elektro Politeknik Negeri Malang, Jl. Soekarno-Hatta, Malang, Indonesia.
Email: muhbadaruzzaman@gmail.com

Manuscript submitted : September 2020
Accepted for publication : Desember 2020

Abstract: The heat conduction equation is a parabolic differential equation and a type of second-order linear partial differential equation. By applying the finite difference scheme in the Crank-Nicolson method, the numerical solution of the heat conduction equation can be calculated. Obtaining numerical solutions with a high level of accuracy, Richardson extrapolation is required. The Crank-Nicolson approach scheme has a high level of accuracy, because the gap between numerical and analytical solutions is very small. Richardson extrapolation greatly influences the accuracy of numerical solutions, because the gap between analytical solution and numerical solutions with Richardson extrapolation is smaller than disparity in numerical solutions without Richardson extrapolation.

2010 Mathematical Subject Classification : 35A35, 49K20
Keywords: Crank-Nicolson method, finite difference scheme, Heat conduction equation, Richardson extrapolation.

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas yang berkenaan dengan satu atau lebih variabel bebas. Persamaan konduksi panas adalah suatu persamaan diferensial parabolik yang merupakan salah satu tipe dari persamaan diferensial parsial linier orde dua [8]. Dalam menentukan solusi numerik dari suatu persamaan diferensial parsial dibutuhkan syarat awal dan syarat batas. Syarat awal adalah suatu kondisi yang telah ditentukan oleh nilai dari variabel bebas dan harus dipenuhi pada awal waktu tertentu. Syarat batas adalah suatu kondisi yang telah ditentukan oleh lebih dari satu nilai variabel bebas dan harus dipenuhi pada batas-batas domain [1].

Pendekatan nilai turunan dalam persamaan konduksi panas harus diketahui dalam menentukan solusi numerik. Skema beda hingga adalah metode yang digunakan untuk menentukan pendekatan nilai turunan dari suatu fungsi pada *grid point* tertentu. Skema beda hingga merupakan salah satu metode numerik terbaik yang dapat digunakan untuk analisis penyebaran panas guna mengetahui ketahanan panas suatu bahan [2].

Terdapat berbagai macam metode numerik untuk menentukan solusi numerik persamaan konduksi panas. Beberapa metode yang menerapkan skema beda hingga dan cocok digunakan untuk menyelesaikan persamaan konduksi panas adalah metode eksplisit, metode implisit dan metode Crank-Nicolson. Skema beda hingga yang diterapkan pada metode Crank-Nicolson memiliki tingkat ketelitian yang sangat baik [3].

Penyelesaian persamaan konduksi panas dengan menggunakan metode Crank-Nicolson menghasilkan suatu sistem persamaan linier. Untuk sistem yang besar, penyelesaian secara iteratif memerlukan operasi aritmatika yang besar pula. Akibatnya penyelesaian dengan menggunakan metode iteratif menjadi tidak efisien. Untuk meningkatkan efisiensi penyelesaian secara iteratif digunakan ektrapolasi Richardson. Teknik ini digunakan untuk mendapatkan nilai awal yang baik bagi proses penyelesaian iterasi [7].

Dalam artikel ini, akan dibahas solusi numerik dari persamaan konduksi panas dengan menerapkan skema beda hingga pusat dalam metode Crank-Nicolson. Selanjutnya untuk meningkatkan keakuratan terhadap variabel waktu serta efisiensi proses iterasi akan diterapkan ektrapolasi Richardson.

1.1. Persamaan Konduksi Panas

Persamaan konduksi panas 1-dimensi dengan asumsi suhu berubah terhadap waktu adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

dengan k suatu konstanta konduktivitas termal [4].

1.2. Skema Beda Hingga Pusat

Pendekatan turunan tingkat satu terhadap variabel waktu ditentukan dengan skema beda hingga pusat berorde dua sebagai berikut.

$$\frac{\partial u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t}=\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+O\left(\Delta t^2\right) \tag{2}$$

Pendekatan turunan tingkat dua terhadap variabel ruang ditentukan dengan skema beda hingga pusat orde dua sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2}=\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{\Delta x^2}+O\left(\Delta x^2\right) \tag{3}$$

[5].

1.3. Metode Crank-Nicolson

Solusi numerik dari persamaan konduksi panas dapat ditentukan dengan skema pendekatan berikut ini.

$$\mathrm{w}^{(n+1)}=\left(\left(I+\lambda A\right)^{-1}\left(I-\lambda A\right)\right)\mathrm{w}^{(n)} \tag{4}$$

dengan I adalah matriks identitas, $\lambda=\dfrac{\Delta t}{2\left(\Delta x\right)^2}$, dan A adalah matriks berikut ini.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Skema pada Persamaan (4) merupakan skema pendekatan Crank-Nicolson [5].

1.4. Ektrapolasi Richardson

Dalam analisis numerik, kuantitas yang belum diketahui a_0 dapat didekati dengan kuantitas terhitung $A(h)$ dan bergantung parameter $h > 0$, sehingga

$$A(0)\equiv\lim_{h\to 0}A(h)=a_0$$

Didefinisikan fungsi $A(h)$ adalah sebagai berikut.

$$A(h)=A(0)+\sum_{i=1}^{n}a_i h^{p_i}+O\left(h^{p_n+1}\right)$$

dengan $0<p_1<p_2<...<p_{n+1}$. Ketika h mendekati 0, maka $A(h)$ mendekati $A(0)$, tetapi tidak diasumsikan bahwa deret $A(0)+a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+...$ konvergen, sehingga diperlukan metode ekstrapolasi untuk mempercepat $A(h)$ konvergen ke $A(0)$. Metode ekstrapolasi tersebut adalah metode ektrapolasi Richardson.

Didefinisikan fungsi berikut ini.

$$A_0\left(h_j\right)=A\left(h_j\right) \quad ; \quad j=1,2,...$$

$$c_n=\alpha^{p_n} \quad ; \quad n=1,2,...$$

Sedemikian sehingga diperoleh

$$A_n\left(h_j\right)=\frac{A_{n-1}\left(h_{j+1}\right)-c_nA_{n-1}\left(h_j\right)}{1-c_n} \tag{5}$$

Persamaan (5) disebut dengan ekstrapolasi Richardson [6]. Ilustrasi ekstrapolasi Richardson diberikan pada tabel berikut.

Tabel 1. Ilustrasi Ekstrapolasi Richardson

$O\left(h^{p_1}\right)$	$O\left(h^{p_2}\right)$	$O\left(h^{p_3}\right)$	$O\left(h^{p_4}\right)$
$A(h_1)$			
$A(h_2)$	$A_1(h_1)$		
$A(h_3)$	$A_1(h_2)$	$A_2(h_1)$	
$A(h_4)$	$A_1(h_3)$	$A_2(h_2)$	$A_3(h_1)$

Berdasarkan Tabel 1, dengan ektrapolasi Richardson akan didapatkan suatu pendekatan nilai fungsi dengan tingkat ketelitian yang cukup tinggi dan proses perhitungan yang efisien.

Dalam pembahasan selanjutnya, didefinisikan $A_0(h) = A(h)$, persamaan untuk ektrapolasi Richardson yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$A_1(h) = \frac{4A_0\left(\frac{h}{2}\right) - A_0(h)}{4-1} = \frac{4A\left(\frac{h}{2}\right) - A(h)}{3} \tag{6}$$

2. Hasil dan Pembahasan

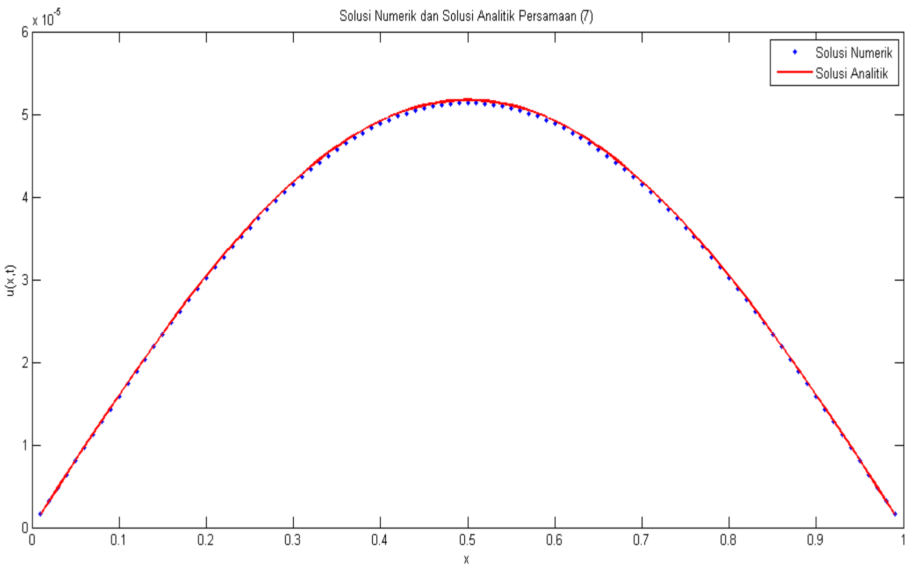
Diperhatikan persamaan konduksi panas dengan syarat awal dan syarat batas Dirichlet berikut.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad ;\ 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{7}$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad ;\ 0 \le x \le 1 \tag{8}$$

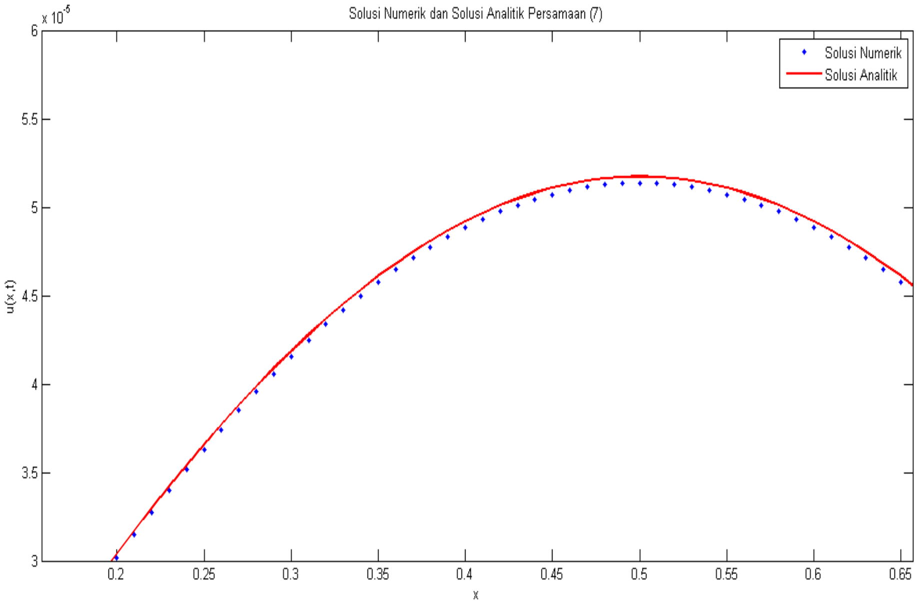
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad ;\ t > 0 \tag{9}$$

Solusi analitik dari Persamaan (7) dengan syarat awal (8) dan syarat batas (9) adalah $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$. Solusi numerik Persamaan (7) diperoleh dengan menggunakan skema pendekatan Crank Nicolson pada Persamaan (4). Selisih antara solusi analitik dan solusi numerik digunakan sebagai tolak ukur keakuratan skema pendekatan Crank Nicolson (4). Solusi numerik dan solusi analitik Persamaan (7) saat t = 1 diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 1. Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan (7)

Berdasarkan Gambar 1, solusi numerik Persamaan 7 sangat mendekati solusi analitiknya dengan memberikan selisih yang cukup kecil. Untuk lebih jelas, selisih solusi numerik dan solusi analitik di beberapa *gridpoint* diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan (7) di x = 0,2 sampai x = 0,65

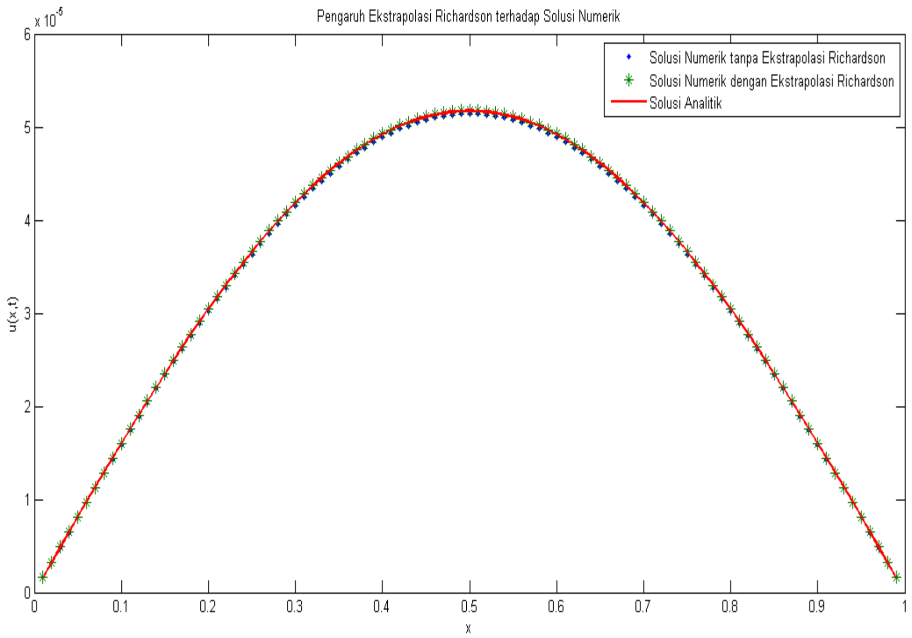
Nilai solusi numerik dan nilai solusi analitik Persamaan (7) serta selisihnya di beberapa *gridpoint* yaitu pada 0 < x < 1 diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 2. Nilai Solusi Numerik dan Solusi Analitik di Beberapa *Gridpoint*

Gridpoint	Solusi Analitik	Solusi Numerik	Selisih Solusi Numerik dan Solusi Analitik
x = 0,1	0,1598 × 10^{-4}	0,1587 × 10^{-4}	0,1148 × 10^{-6}
x = 0,2	0,3040 × 10^{-4}	0,3018 × 10^{-4}	0,2184 × 10^{-6}
x = 0,3	0,4184 × 10^{-4}	0,4154 × 10^{-4}	0,3006 × 10^{-6}
x = 0,4	0,4919 × 10^{-4}	0,4884 × 10^{-4}	0,3534 × 10^{-6}
x = 0,5	0,5172 × 10^{-4}	0,5135 × 10^{-4}	0,3716 × 10^{-6}
x = 0,6	0,4919 × 10^{-4}	0,4884 × 10^{-4}	0,3534 × 10^{-6}
x = 0,7	0,4184 × 10^{-4}	0,4154 × 10^{-4}	0,3006 × 10^{-6}
x = 0,8	0,3040 × 10^{-4}	0,3018 × 10^{-4}	0,2184 × 10^{-6}
x = 0,9	0,1598 × 10^{-4}	0,1587 × 10^{-4}	0,1148 × 10^{-6}

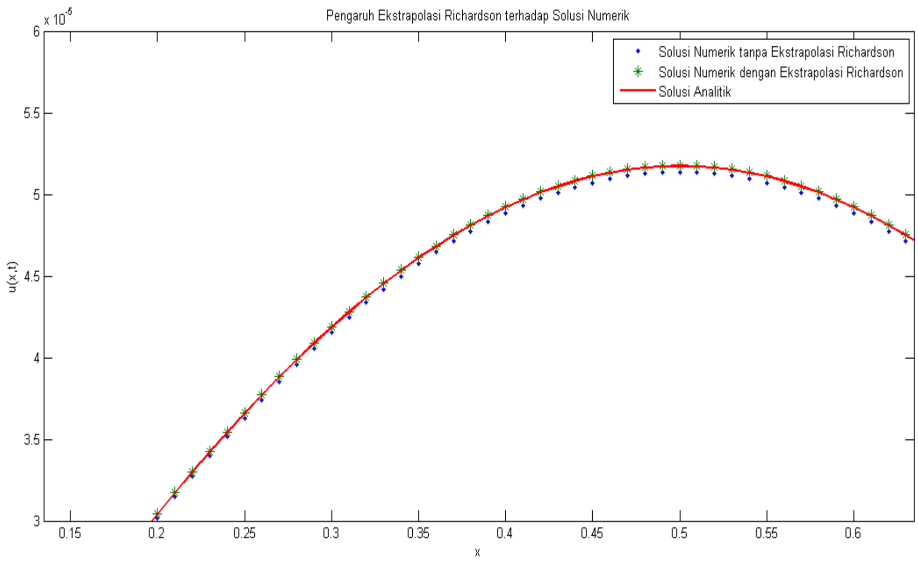
Pada Tabel 2 hanya diberikan nilai pada *gridpoint* 0 < x < 1, karena nilai pada x = 0 dan x = 1, sudah diketahui sebagai syarat batas yang harus dipenuhi. Hal ini juga yang menyebabkan selisih solusi numerik dan solusi analitik pada *gridpoint* yang dekat dengan batas selang cukup kecil. Berdasarkan Gambar 1, Gambar 2 dan Tabel 2, skema pendekatan Crank-Nicolson mempunyai tingkat akurasi yang tinggi, karena solusi numerik Persamaan (7) mendekati solusi analitiknya. Hal tersebut ditunjukkan pada selisih solusi numerik dan solusi analitik yang sangat kecil.

Selanjutnya akan dibahas pengaruh ekstrapolasi Richardson pada Persamaan (6) terhadap keakuratan solusi numerik Persamaan (7) yang dihasilkan. Secara umum, pada *gridpoint* 0 < x < 1, solusi numerik dengan ektrapolasi Richardson saat t = 1 diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Pengaruh Ekstrapolasi Richardson terhadap Solusi Numerik Persamaan (7)

Untuk lebih jelas, perbedaan solusi numerik tanpa ekstrapolasi Richardson dan solusi numerik dengan ekstrapolasi Richardson diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Pengaruh Ekstrapolasi Richardson terhadap Solusi Numerik Persamaan (7)
di x = 0,2 sampai x = 0,6

Berdasarkan Gambar 3, maka ektrapolasi Richardson sangat berpengaruh terhadap keakuratan solusi numerik. Hal ini diperjelas pada Gambar 4, yaitu solusi numerik dengan ektrapolasi Richardson sangat mendekati solusi analitiknya.

Nilai selisih antara solusi numerik dengan ekstrapolasi Richardson dan solusi analitiknya di beberapa *gridpoint* diberikan pada tabel berikut.

Tabel 3. Nilai Solusi Numerik dengan Ekstrapolasi Richardson di Beberapa *Gridpoint*

Gridpoint	Solusi Analitik	Solusi Numerik dengan Ekstrapolasi Richardson	Selisih Solusi Numerik dengan Ekstrapolasi Richardson dan Solusi Analitik
$x = 0{,}1$	$0{,}1598 \times 10^{-4}$	$0{,}1600 \times 10^{-4}$	$0{,}1290 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}2$	$0{,}3040 \times 10^{-4}$	$0{,}3043 \times 10^{-4}$	$0{,}2453 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}3$	$0{,}4184 \times 10^{-4}$	$0{,}4188 \times 10^{-4}$	$0{,}3377 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}4$	$0{,}4919 \times 10^{-4}$	$0{,}4923 \times 10^{-4}$	$0{,}3970 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}5$	$0{,}5172 \times 10^{-4}$	$0{,}5176 \times 10^{-4}$	$0{,}4174 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}6$	$0{,}4919 \times 10^{-4}$	$0{,}4923 \times 10^{-4}$	$0{,}3970 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}7$	$0{,}4184 \times 10^{-4}$	$0{,}4188 \times 10^{-4}$	$0{,}3377 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}8$	$0{,}3040 \times 10^{-4}$	$0{,}3043 \times 10^{-4}$	$0{,}2453 \times 10^{-7}$
$x = 0{,}9$	$0{,}1598 \times 10^{-4}$	$0{,}1600 \times 10^{-4}$	$0{,}1290 \times 10^{-7}$

Ekstrapolasi Richardson memberikan solusi numerik dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi. Hal ini dibuktikan dengan nilai selisih solusi numerik dengan ekstrapolasi Richardson dan solusi analitiknya pada Tabel 3 lebih kecil daripada nilai selisih solusi numerik tanpa ekstrapolasi Richardson dan solusi analitiknya pada Tabel 2.

3. Kesimpulan

Skema pendekatan Crank-Nicolson mempunyai tingkat akurasi yang tinggi, karena solusi numerik yang dihasilkan mendekati solusi analitiknya yang artinya selisih solusi numerik dan solusi analitik yang sangat kecil. Ekstrapolasi Richardson yang diterapkan pada skema pendekatan Crank-Nicolson memberikan solusi numerik yang sangat akurat. Hal ini dibuktikan dengan selisih solusi numerik dengan ekstrapolasi Richardson dan solusi analitiknya lebih kecil daripada selisih solusi numerik tanpa ekstrapolasi Richardson dan solusi analitiknya. Jadi, ektrapolasi Richardson sangat berpengaruh terhadap keakuratan solusi numerik.

Referensi

[1] Bradie, B. (2006). *Friendly Intoduction to Numerical Analysis*. Jersey: Pearson Education, Inc.

[2] El Maghfiroh, R., & Zaman, M. B. (2020). Analisis Numerik Penyebaran Panas Pada Konstruksi Beton Menggunakan Skema Beda Hingga. *MAp (Mathematics and Applications) Journal*, *2*(1), 9-15.

[3] El Maghfiroh, R., & Zaman, M. B. (2020). Proses Penyebaran Konduksi Panas 1-Dimensi Pada Pipa Besi. *Transformasi: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, *4*(1), 251-258.

[4] Holman, J.P. (2010). *Heat Transfer* (10th ed.). New York: The Mc Graw-Hill Companies, Inc.

[5] Humi and Miller. (1992). *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. Boston: PWS-KENT Publishing.

[6] Joyce, D.C. (1971). Survey of Ektrapolation Process in Numerical Analysis, *SIAM Review*, 4,13,435-490.

[7] Masduki. (2011). Aplikasi Skema Diskritisasi Order Empat dan Ekstrapolasi Richardson untuk Menyelesaikan Persamaan Konveksi Difusi. *Jurnal Penelitian Sains & Teknologi, Vol.12, No.1*, 90-98.

[8] Ross, S.L. (1984). *Differential Equation* (3rd ed.). Canada: John Willey & Sons, Inc.