April 2021 | Vol. 2 | No. 1 Halaman 13–18
p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

$P_2 \rhd_o G$-Supermagic Labeling for Comb Product of Graphs

Ganesha Lapenangga Putra

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Kupang-NTT, Indonesia.
Email: ganesha.lapenangga@staf.undana.ac.id

Manuscript submitted : March 2021;
Accepted for publication : April 2021.

Abstract: Suppose $G = (V, E)$ is a connected graph. A graph G admits H- covering if for every edge $e \in E(G)$ belong to a subgraph of G isomorphic to H. Let G admits H-covering. A graph G is called H-magic if there exist a bijection $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots |V(G)| + |E(G)|\}$ such $f(H') = \sum_{(v \in V')} f(v) + \sum_{(e \in E')} f(e) = k$ for every subgraph $H' = (V', E')$ of G isomorphic to H. Moreover, it is called H-supermagic if $f\big(V(G)\big) = \{1,2, \ldots, |V(G)|\}$. Next, we talk about a comb product. Let $G = (V, E)$ and $H = (V', E')$ a graph and let $o \in V'$. A comb product between G and H, denoted by $G \rhd_o H$ is a graph obtained by taking one copy of G and $|V|$ copy of H then identifying the i-th copy of graph H at vertex o to the i-th vertex of graph G. In this paper, we construct a $P_2 \rhd_o G$-supermagic labeling of a graph $C_m \rhd_o G$ and $P_m \rhd_o$ G.

2010 Mathematical Subject Classification: 05C78.
Keywords : cycle graph, path graph, H-supermagic labeling, comb product.

1. Pendahuluan

Graf G merupakan suatu pasangan terurut $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tak kosong dari objek yang disebut titik dan $E \subset [V]^2 = \{\{u, v\}, u, v \in V\}$ [3]. Untuk memudahkan penulisan, anggota E ditulis uv dari pada $\{u, v\}$. Adapun $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ secara berturut-turut menyatakan banyaknya titik dan sisi pada graf G [2]. Selanjutnya, diberikan definisi hasil kali sisir pada graf. Misalkan graf G dan H adalah graf terhubung yang memuat o sebagai salah satu titik pada graf H. Hasil kali sisir antara graf G dan H, dinotasikan $G \rhd_o H$, merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf G dan salinan sebanyak $|V(G)|$ dari graf H, kemudian menyatukan titik o pada graf H ke-i dengan titik ke-i pada graf G [8].

Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan memuat selimut H jika untuk setiap sisi pada graf G termuat pada suatu subgraf yang isomorfik terhadap H [4]. Selanjutnya graf G yang memuat selimut-H dikatakan H-ajaib jika terdapat fungsi bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V| + |E|\}$ sehingga untuk setiap subgraf H' dari G yang isomorfik dengan H berlaku $f(H') = \sum_{(v \in V)} f(v) + \sum_{(e \in E)} f(e) = k$ dengan k adalah bilangan ajaib [4]. Selanjutnya, graf G disebut H-ajaib super jika $f(V) = \{1, 2, \ldots, |V|\}$ [4]. Llado dan Moragas [1] telah dibuktikan bahwa graf W_n adalah C_3-ajaib super untuk

$n \geq 5$, n ganjil. Mereka juga telah membuktikan bahwa jika G graf yang tak memuat subgraf C_4, maka graf $G \times K_2$ adalah C_4 -ajaib super. Selanjutnya, Maryati, Salman, dan Baskoro [9] telah mengkarakterisasi semua graf G sehingga gabungan terpisah dari graf G merupakan graf G- ajaib super. Mereka juga telah membuktikan bilangan ajaib untuk gabungan dari graf lintasan, yakni mP_n untuk sebarang m dan n. Selvagopal dan Jeyanti [6] juga membuktikan bahwa graf ular poligon-k dengan panjang n merupakan graf C_k - ajaib super. Kemudian, pada [5], mereka juga telah membuktikan pelabelan C_4- ajaib super pada graf $C_n \times P_m$ untuk $m \geq 2, n = 3$ dan $n > 4$.

2. Multi-himpunan Seimbang

Sebelum membahas definisi, berikut diberikan beberapa notasi yang digunakan.

$$\begin{aligned}
\sum X &= \textstyle\sum_{x \in X} x, \\
[a,b] &= \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbb{Z}\}, \\
p \bmod^* q &= \begin{cases} p \bmod q; & p \neq kq \\ q \quad ; & p = kq \end{cases}, \\
\{a\} \uplus \{a,b\} &= \{a,a,b\} \\
k[a,b] &= \uplus_{i=1}^{k} [a,b].
\end{aligned} \tag{1}$$

Multi-himpunan merupakan modifikasi dari himpunan yang mengijinkan unsur yang sama muncul lebih dari satu kali [8]. Misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan X multi-himpunan dari bilangan bulat positif. X dikatakan multi-himpunan k-seimbang jika terdapat k himpunan bagian X, (namakan $X_1, X_2, \ldots, X_k$) sehingga untuk setiap $h \in [1,k]$,

$$\begin{aligned}
|X_h| &= \frac{|X|}{k}, \\
\sum X_h &= \frac{\sum X}{k} \in \mathbb{N}, \\
\uplus_{i=1}^{k} X_h &= X.
\end{aligned} \tag{2}$$

X_h disebut subhimpunan seimbang dari X. Selanjutnya diberikan beberapa lemma terkait multi-himpunan k-seimbang.

Lema 2.1 *Misalkan $m, m_1, n_1 \in \mathbb{N}$ dengan m bilangan ganjil dan $n_1 + m_1$ bilangan genap, maka multi-himpunan $X = 2[1, (m_1+n_1)m] \uplus [(m_1+n_1)m+1, (m_1+n_1+1)m]$ adalah m-seimbang.*

Bukti:

Pertama, ditunjukkan bahwa X_h adalah multi-himpunan yang seimbang. Pembuktian ini terbagi atas empat kasus.

Kasus 1: n_1 dan m_1 ganjil

Bentuk $X_h = \{a_{h \bmod * m}, a_{(h+1) \bmod * m}, b^1_{h \bmod * m}, \ldots, b^{n_1-1}_{h \bmod * m}, b^1_{(h+1) \bmod * m}, \ldots,$
$b^{n_1-1}_{(h+1) \bmod * m}, c^1_{h \bmod * m}, \ldots, c^{m_1}_{h \bmod * m}, c^1_{(h+1) \bmod * m}, \ldots, c^{m_1}_{(h+1) \bmod * m}, d_h\}$

dengan,

$$a_h = \begin{cases} \dfrac{h+1}{2}, & h \text{ ganjil } \in [1,m] \\ \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{h}{2}, & h \text{ genap } \in [1,m] \end{cases}$$

$$b_h^j = \begin{cases} (j+1)m + 1 - h, & h \in [1,m] \\ & j \; ganjil \in [1, n_1 - 1] \\ jm + h, & h \in [1,m] \\ & j \; genap \in [1, n_1 - 1] \end{cases}$$

(3)

$$c_h^k = \begin{cases} mn_1 + mk + 1 - h, & h \in [1,m] \\ & k \; ganjil \in [1, m_1] \\ mn_1 + (k-1)m + h\,, & h \in [1,m] \\ & k \; genap \in [1, n] \end{cases}$$

$$d_h = (m_1 + n_1)m + h\,, \qquad h \in [1,m]$$

Perhatikan bahwa $|X_h| = 2(m_1 + n_1) + 1$ dan

$$\sum X_h = (m_1 + n_1)^2 m + \frac{1}{2}(m+1)(2m_1 + 2n_1 + 1) \tag{4}$$

Kasus 2: n_1 dan m_1 genap

Bentuk $X_h, \; a_h, \; b_h^j, \; d_h$ sama dengan Kasus 1 dan

$$c_h^k = \begin{cases} (mn_1 + h) + (k-1)m, & h \in [1,m] \\ & k \; ganjil \in [1, m_1] \\ (mn_1 + 1) - h + km\,, & h \in [1,m] \\ & k \; genap \in [1, m_1] \end{cases} \tag{5}$$

Perhatikan bahwa $|X_h| = 2(m_1 + n_1) + 1$ dan

$$\sum X_h = (m_1 + n_1)^2 m + \frac{1}{2}(m+1)(2m_1 + 2n_1 + 1) \tag{6}$$

Kasus 3: n_1 ganjil dan m_1 genap

Bentuk $X_h, \; a_h, \; b_h^j, \; c_h^k$ sama dengan Kasus 1 dan

$$d_h = \begin{cases} (m_1 + n_1)m + h, & h = m \\ (m_1 + n_1 + 1)m - h\,, & h \in [1, m-1] \end{cases} \tag{7}$$

Perhatikan bahwa $|X_h| = 2(m_1 + n_1) + 1$ dan

$$\sum X_h = (m_1 + n_1)^2 m + \frac{1}{2}(m+1)(2m_1 + 2n_1 + 1) \tag{8}$$

Kasus 4: n_1 genap dan m_1 ganjil.

Bentuk $X_h, \; a_h, \; b_h^j, \; c_h^k$ sama dengan Kasus 2 dan

$$d_h = \begin{cases} (m_1 + n_1)m + h, & h = m \\ (m_1 + n_1 + 1)m - h\,, & h \in [1, m-1] \end{cases} \tag{9}$$

Perhatikan bahwa $|X_h| = 2(m_1 + n_1) + 1$ dan

$$\sum X_h = (m_1 + n_1)^2 m + \frac{1}{2}(m+1)(2m_1 + 2n_1 + 1) \tag{10}$$

Selanjutnya, tinjau $\frac{\sum X}{m}$, $\frac{|X|}{m}$ dan $\uplus_{h=1}^{m} X_h$. Berdasarkan persamaan (3), (5), (7), (9) dan melihat peta dari fungsi tersebut, diperoleh $\uplus_{h=1}^{m} X_h = X$. Menurut premis pada Lemma 2.1, diperoleh $\frac{|X|}{m} = 2(m_1 + n_1) + 1 = |X_h|$ dan $\frac{\sum \boldsymbol{X}}{\boldsymbol{m}} = \frac{(m_1+n_1)^2 m^2 + \frac{m}{2}(m+1)(2m_1+2n_1+1)}{m} = \sum X_h$.

3. Hasil Utama

Berikut diberikan himpunan titik dan sisi dari graf $P_m \rhd_o G$ dan $C_m \rhd_o G$ dengan $|V(G)| = n_1$ dan $|E(G)| = m_1$.

$V(C_m \rhd_o G) = \{v_h | 1 \leq h \leq m\} \cup \{v_h^j \,|\, 1 \leq j \leq n_1 - 1; 1 \leq h \leq m\}$

$E(C_m \rhd_o G\} = \{e_h = v_h v_{(h+1) mod^* m} | 1 \leq h \leq m\} \cup \{e_h^k \,|\, 1 \leq k \leq m\_1; 1 \leq h \leq m\}$ (11)

$V(P_m \rhd_o G) = \{v_h | 1 \leq h \leq m\} \cup \{v_h^j \,|\, 1 \leq j \leq n_1 - 1; 1 \leq h \leq m\}$

$E(P_m \rhd_o G\} = \{e_i = v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{e_h^k \,|\, 1 \leq k \leq m_1; 1 \leq h \leq m\}$

Selanjutnya, diberikan teorema terkait pelabelan

Teorema 3.1 *Misalkan G suatu graf. Jika graf $C_m \rhd_o G$ memiliki tepat m subgraf yang isomorfik dengan $P_2 \rhd_o G$ untuk m bilangan ganjil, maka graf $C_m \rhd_o G$ merupakan graf $P_2 \rhd_o G$-ajaib super.*

Bukti:

Misalkan G suatu graf dengan $|V(G)| = n_1$ dan $|E(G)| = m_1$. Pembuktian teorema ini dibagi menjadi empat kasus, yakni n_1 dan m_1 ganjil, n_1 dan m_1 genap, n_1 ganjil dan m_1 genap, serta n_1 genap dan m_1 ganjil.

Kasus 1 : n_1 dan m_1 ganjil

Bentuk fungsi pelabelan untuk titik dan sisi pada graf $C_m \rhd G$ dengan $f(v_h) = a_h$, $f(e_h) = d_h$, $f(v_h^j) = b_h^j$, dan $f(e_h^k) = c_h^k$ seperti pada persamaan (3).

Perhatikan himpunan X_h pada bukti Kasus 1 Lemma 2.1. Anggota himpunan X_h merupakan label titik dan sisi dari graf $P_2 \rhd_o G$ yang merupakan subgraf dari graf $C_m \rhd_o G$. Kemudian, perhatikan bahwa jumlahan dari label titik dan sisi setiap subgraf $P_2 \rhd_o G$ pada graf $C_m \rhd_o G$ sama, yaitu $\sum X_h = (m_1 + n_1)^2 m + \frac{1}{2}(m+1)(2m_1 + 2n_1 + 1)$.

Dengan melihat peta dari masing-masing fungsi pada (3), diperoleh

$$f(\{v_h\}) \cup f(\{e_h\}) \cup f(\{v_h^j\}) \cup f(\{e_h^k\}) = [1, m] \cup [m+1, mn_1] \cup [mn_1 + 1, (m_1 + n_1)m] \cup [(m_1 + n_1)m + 1, (m_1 + n_1 + 1)m]. \quad (12)$$

Akibatnya, f merupakan fungsi bijektif. Dengan cara serupa diterapkan pada Kasus 2 sampai Kasus 4, diperoleh graf $C_m \rhd_o G$ merupakan graf $P_2 \rhd_o G$ ajaib super untuk m bilangan ganjil. ∎

Selanjutnya, perhatikan pelabelan $P_2 \rhd_o G$-ajaib super pada graf $C_m \rhd_o G$. $f(\{e_h | 1 \leq h \leq m\}) = [(m_1 + n_1)n + 1, (m_1 + n_1 + 1)m]$ dan label sisi $e_m = v_m v_1$ adalah $f(e_m) = (m_1 + n_1 + 1)m$. Jika menghapus sisi e_m dan meniadakan labelnya, maka diperoleh pelabelan $P_2 \rhd_o G$-ajaib super pada graf $P_m \rhd_o G$ dengan $m - 1$ subgraf yang isomorfik dengan $P_2 \rhd_o G$.

Akibat 3.2 *Misalkan* G *suatu graf. Jika graf* $P_m \rhd_o G$ *memiliki tepat* $m-1$ *subgraf yang isomorfik dengan* $P_2 \rhd_o G$ *untuk m bilangan ganjil, maka graf* $P_m \rhd_o G$ *merupakan graf* $P_2 \rhd_o G$*-ajaib super.* ■

Perhatikan lagi bahwa Teorema 3.1 juga berlaku untuk Pelabelan $P_2 \rhd_o G$-ajaib super pada graf $P_m \rhd_o G$ untuk m genap dan $|V(G)|+|E(G)|$ ganjil. Dengan menggunakan Teorema 3.1 pada Kasus 3 dan 4 dan menerapkan hal yang sama seperti Akibat 3.2, diperoleh hasil berikut.

Akibat 3.3 *Misalkan* G *suatu graf dengan* $|V(G)|+|E(G)|$ *ganjil. Jika graf* $P_m \rhd_o G$ *memiliki tepat* $m-1$ *subgraf yang isomorfik dengan* $P_2 \rhd_o G$ *untuk m bilangan genap, maka graf* $P_m \rhd_o G$ *merupakan graf* $P_2 \rhd_o G$*-ajaib super.* ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada bagian 3, disimpulkan bahwa untuk sebarang graf G dan m bilangan ganjil, graf $C_m \rhd_o G$ dan $P_m \rhd_o G$merupakan graf $P_2 \rhd_o G$-ajaib super. Sedangkan, untuk G graf dengan $|V(G)|+|E(G)|$ bilangan ganjil dan m bilangan genap, maka graf $P_m \rhd_o G$ merupakan graf $P_2 \rhd_o G$-ajaib super. Selanjutnya, masalah yang belum terselesaikan adalah pelabelan $P_2 \rhd_o G$-ajaib super pada graf $C_m \rhd_o G$ untuk m bilangan genap dan Pelabelan $P_2 \rhd_o G$-ajaib super pada graf $P_m \rhd_o G$ untuk m dan $|V(G)|+|E(G)|$ bilangan genap.

Referensi

[1] A. Lladó dan J. Moragas, (2007). Cycle-magic graphs, *Discrete Math.,* 307, 2925-2933

[2] Chartrand, G. dan Zhang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory*. New York: McGraw Hill.

[3] Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th ed.). Berlin: Springer.

[4] Galian, J. A. (2020). A Dynamic Survey of Graph Labeling (23rd ed.). *Electronic Journal of Combinatorics, 17#ds6.*

[5] P. Jeyanthi dan P. Selvagopal, (2013). Some C_4-supermagic graphs, *Ars. Combin.,* 111, 129-136.

[6] P. Selvagopal dan P. Jeyanthi, (2008). On C_k-supermagic graphs, *Inter. J. Math. Comput. Sci.,* 3, 25-30.

[7] Suhadi, W. S., Novi, M., Ira, A.P. (2017). *The Metric Dimension of Comb Product Graphs. MATEMATIK VESNIK* 69, 4 , 248-258.

[8] T. K. Maryati, A. N. M. Salman, E. T. Baskoro, J. Ryan dan R. Miller, (2010). On H-supermagic labelings for certain schakles and amalgamations of a connected graph, *Util. Math*., 83, 333-342.

[9] T. K. Maryati, E. T. Baskoro dan A. N. M. Salman, (2008). P_h- (super) magic labelings of some trees, *J. Combin. Math. Combin. Comput.,* 65, 197-204.