TENSOR Pure and Applied Mathematics Journal

April 2021 | Vol. 2 | No. 1 Halaman 19–24

p-ISSN: 2723-0325 e-ISSN: 2723-0333

Fixed Point Theorems for F_c-Contractions Mapping of Hardy-Rogers-Type in Complex Valued Metric Spaces

Irvandi Gorby Pasangka[1*]

[1] Program Studi Matematika, Universitas Nusa Cendana, Jl. Adisucipto, Penfui, Kota Kupang, NTT, Indonesia.
Email: irvand91@gmail.com

Manuscript submitted : March 2021;
Accepted for publication : April 2021.

Abstract: *In this paper, we will discuss about fixed point theorem for F_c-contraction mapping of Hardy-Roger-type in complex valued metric space. The existence of the fixed point for the F_c-contraction mapping of Hardy-Roger-type is guaranteed if it satisfies $\gamma \neq 1$, $0 \precsim \alpha, \beta, \gamma, \mu, L$, and $\alpha + \beta + \gamma + 2\mu = 1$. Furthermore, if $\alpha + \mu + L \precsim 1$ then T has a unique fixed point $x^* \in X$ and for every $x \in X$ the sequence $\{T^n(x)\}$ converges to x^*.*

Keywords: *F_c-contraction of Hardy-Roger-Type, complex valued metric spaces, fixed point.*

1. Pendahuluan

Teori titik tetap merupakan salah satu penelitian dalam bidang matematika analisis yang memiliki cukup banyak aplikasi. Salah satu aplikasinya adalah untuk membuktikan eksistensi solusi dari suatu sistem persamaan diferensial. Sifat-sifat terkait teori titik tetap telah banyak dikembangkan oleh para peneliti, yang awal mulanya dari ditemukannya Prinsip Kontraksi Banach pada tahun 1922.

Penelitian mengenai titik tetap terus berlanjut hingga sekarang, para peneliti terus mengembangkan atau memperumum sifat-sifat terkait titik tetap, di antaranya memperumum jenis pemetaannya dan memperumum ruang pembicaraannya [1-10]. Pada tahun 2011, Azam, Fisher dan Khan [3] memperkenalkan ruang metrik bernilai kompleks yang merupakan perumuman dari ruang metrik. Para peneliti pun banyak yang mulai mengembangkan teori titik tetap pada ruang metrik bernilai kompleks, di antaranya adalah Ahmad, Azam, dan Saejung [1].

Selain memperumum ruang pembicaraan, para peneliti juga memperumum jenis pemetaannya, di antaranya adalah Wardowski [10] yang membuktikan eksistensi titik tetap untuk pemetaan kontraksi-F, dilanjutkan dengan Cosentino dan Vetro [5] yang membuktikan eksistensi titik tetap untuk pemetaan kontraksi-F tipe Hardy-Roger, di mana pemetaan kontraksi-F tipe Hardy-Roger adalah pemetaan yang lebih umum dari pemetaan kontraksi-F. Dengan memperumum sifat-sifat terkait titik tetap, diharapkan aplikasi yang dihasilkan pun semakin luas.

2. Hasil dan Pembahasan

Diberikan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, didefinisikan urutan parsial $\precsim$ pada $\mathbb{C}$ yaitu $z_1 \precsim z_2$ jika dan hanya jika $Re(z_1) \leq Re(z_2)$ dan $Im(z_1) \leq Im(z_2)$. Lebih lanjut, $z_1 \prec z_2$ jika dan hanya jika $Re(z_1) < Re(z_2)$ dan $Im(z_1) < Im(z_2)$. Berikut adalah definisi dari ruang metrik bernilai kompleks yang dikenalkan oleh Azam, Fisher, dan Khan [3].

Definisi 1. Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{C}$ disebut metrik bernilai kompleks pada X jika memenuhi:

a. $0 \precsim d(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
b. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$;
c. $d(x,y) \precsim d(x,z) + d(z,x)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Selanjutnya pasangan (X,d) disebut ruang metrik bernilai kompleks.

Definisi 2. Diberikan ruang metrik bernilai kompleks (X,d).

i. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $0 \prec c \in \mathbb{C}$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $d(x_n, x_m) \prec c$ untuk setiap $n, m \geq N$.
ii. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $0 \prec c \in \mathbb{C}$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $d(x_n, x) \prec c$ untuk setiap $n \geq N$.
iii. Ruang metrik bernilai kompleks (X,d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen.

Lemma 3. Diberikan ruang metrik bernilai kompleks (X,d). Jika $\{x_n\}$ barisan di X, maka pernyataan-pernyataan berikut akan berlaku.

a. Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika barisan $\{|d(x_n, x)|\}$ konvergen ke 0.
b. Barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy jika dan hanya jika barisan $\{|d(x_n, x_{n+m})|\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 0.

Selanjutnya merupakan definisi dari pemetaan kontraksi-F yang diberikan oleh Wardowski [10].

Definisi 4. Diberikan ruang metrik (X,d). Pemetaan $T: X \to X$ disebut kontraksi-F jika terdapat $r > 0$ dan $F \in \mathcal{F}$ sehingga $r + F\Big(d\big(T(x), T(y)\big)\Big) \leq F\big(d(x,y)\big)$ untuk setiap $x, y \in X$ dengan $d\big(T(x), T(y)\big) > 0$, di mana $\mathcal{F}$ adalah koleksi semua fungsi $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dan memenuhi:

(F1) F adalah fungsi monoton naik tegas, yaitu jika $x < y$ maka $F(x) < F(y)$;
(F2) Untuk setiap barisan $\{a_n\}$ di $\mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$;
(F3) Terdapat $k \in (0,1)$ sehingga $\lim_{a\to 0^+} a^k F(a) = 0$.

Selanjutnya notasi $\mathcal{F}_c$ merupakan koleksi semua fungsi $F: \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ di mana $\mathbb{C}^+ = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}^+\}$ dan memenuhi:

(F1') F adalah fungsi monoton naik tegas, yaitu jika $x \prec y$ maka $F(x) \prec F(y)$;

(F2') Untuk setiap barisan $\{\alpha_n\}$ di $\mathbb{C}^+$, $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} |F(\alpha_n)| = -\infty$;

(F3') Terdapat $k \in (0,1)$ sehingga untuk setiap barisan $\{\alpha_n\}$ di $\mathbb{C}^+$ dengan $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$, berlaku $\lim_{n\to\infty} \left|{\alpha_n}^k F(\alpha_n)\right| = 0$.

Berikut didefinisikan pemetaan kontraksi-F_c tipe Hardy-Roger di ruang metrik lengkap bernilai kompleks.

Definisi 5. Diberikan ruang metrik bernilai kompleks (X, d). Pemetaan $T: X \to X$ disebut pemetaan kontraksi-F_c tipe Hardy-Roger jika terdapat $0 \prec r$ dan $F \in \mathcal{F}_c$ sehingga

$$r + F\Big(d\big(T(x), T(y)\big)\Big) \precsim F\Big(\alpha. d(x, y) + \beta. d\big(x, T(x)\big) + \gamma. d\big(y, T(y)\big) + \mu. d\big(x, T(y)\big) + L. d\big(y, T(x)\big)\Big), \quad (1)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan $0 \prec d(T(x), T(y))$, di mana $\gamma \neq 1$, $0 \precsim \alpha, \beta, \gamma, \mu, L$, dan $\alpha + \beta + \gamma + 2\mu = 1$.

Teorema 6. Diberikan ruang metrik lengkap bernilai kompleks $(X. d)$. Jika $T: X \to X$ adalah pemetaan kontraksi-F_c tipe Hardy-Roger maka T memiliki titik tetap. Lebih lanjut, jika $\alpha + \mu + L \precsim 1$, maka T memiliki titik tetap tunggal $x^* \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, barisan $\{T^n(x)\}$ konvergen ke x^*.

Bukti. Diambil sebarang $x_0 \in X$. Dibentuk barisan $\{x_n\}$ dengan $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$, …, $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika ada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sehingga $d(x_n, x_{n+1}) = 0$, maka x_n adalah titik tetap pemetaan T. Jika $0 \precsim d_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ di mana $d_n = d(x_n, x_{n+1})$, maka berdasarkan (1) diperoleh

$$\begin{aligned}
r + F(d_n) &= r + F(d(x_n, x_{n+1})) \\
&= r + F\Big(d\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big)\Big) \\
&\precsim F\begin{pmatrix} \alpha. d(x_{n-1}, x_n) + \beta. d\big(x_{n-1}, T(x_{n-1})\big) + \gamma. d\big(x_n, T(x_n)\big) + \mu. d\big(x_{n-1}, T(x_n)\big) \\ +L. d\big(x_n, T(x_{n-1})\big) \end{pmatrix} \\
&= F\Big(\alpha. d(x_{n-1}, x_n) + \beta. d(x_{n-1}, x_n) + \gamma. d(x_n, x_{n+1}) + \mu. d(x_{n-1}, x_{n+1}) + L. \big(d(x_n, x_n)\big)\Big) \\
&= F\big(\alpha. d_{n-1} + \beta. d_{n-1} + \gamma. d_n + \mu. d(x_{n-1}, x_{n+1})\big) \\
&\precsim F\Big(\alpha. d_{n-1} + \beta. d_{n-1} + \gamma. d_n + \mu. \big(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\big)\Big) \\
&= F\big(\alpha. d_{n-1} + \beta. d_{n-1} + \gamma. d_n + \mu. (d_{n-1} + d_n)\big) \\
&= F\big((\alpha + \beta + \mu)d_{n-1} + (\gamma + \mu)d_n\big).
\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned}
F(d_n) &\precsim F\big((\alpha + \beta + \mu)d_{n-1} + (\gamma + \mu)d_n\big) - r \quad (2) \\
&\prec F\big((\alpha + \beta + \mu)d_{n-1} + (\gamma + \mu)d_n\big). \quad (3)
\end{aligned}$$

Selanjutnya karena F monoton naik tegas, maka berdasarkan (3) diperoleh

$$d_n \prec (\alpha + \beta + \mu)d_{n-1} + (\gamma + \mu)d_n$$

$$\Rightarrow (1-\gamma-\mu)d_n \prec (\alpha+\beta+\mu)d_{n-1}, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Karena $\gamma \neq 1$ dan $\alpha+\beta+\gamma+2\mu = 1$, maka $0 \prec \alpha+\beta+\mu = 1-\gamma-\mu$, akibatnya

$$d_n \prec \frac{\alpha+\beta+\mu}{1-\gamma-\mu} d_{n-1} = d_{n-1}, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Jadi barisan $\{|d_n|\}$ adalah barisan monoton turun tegas. Selanjutnya karena $d_n \prec d_{n-1}$ dan $\alpha+\beta+\gamma+2\mu = 1$ maka

$$\begin{aligned} r + F(d_n) &\precsim F\big((\alpha+\beta+\mu)d_{n-1} + (\gamma+\mu)d_n\big) \\ &\precsim F\big((\alpha+\beta+\mu+\gamma+\mu)d_{n-1}\big) \\ &= F((\alpha+\beta+\gamma+2\mu)d_{n-1}) \\ &= F(d_{n-1}). \end{aligned}$$

Jadi $F(d_n) \precsim F(d_{n-1}) - r \precsim F(d_{n-2}) - 2r \precsim \cdots \precsim F(d_0) - nr$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, atau

$$F(d_n) \precsim F(d_0) - nr, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Berdasarkan (4) diperoleh $\lim_{n\to\infty} |F(d_n)| \precsim -\infty$. Selanjutnya karena $\lim_{n\to\infty} |F(d_n)| \precsim -\infty$ dan $0 \precsim d_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, maka berdasarkan (F2’) diperoleh $\lim_{n\to\infty} |d_n| = 0$. Berdasarkan (F3’), diketahui bahwa terdapat $k \in (0,1)$ sehingga $\lim_{n\to\infty} \left|d_n^k F(d_n)\right| = 0$, maka dari (4) diperoleh

$$d_n^k F(d_n) - d_n^k F(d_0) \precsim d_n^k (F(d_0) - nr) - d_n^k F(d_0) = -nr d_n^k \precsim 0. \tag{5}$$

Diperhatikan bahwa $\lim_{n\to\infty} |d_n| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} \left|d_n^k F(d_n)\right| = 0$, akibatnya jika dikenakan limit untuk n menuju tak hingga pada pertidaksamaan (5), akan diperoleh $\lim_{n\to\infty} \left|n d_n^k\right| = 0$, atau $\lim_{n\to\infty} \left|n^{\frac{1}{k}} d_n\right| = 0$. Diperhatikan bahwa karena $k \in (0,1)$ maka $\frac{1}{k} > 1$, akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$ konvergen. Selanjutnya karena $\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{d_n}{\frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}}\right)\right| = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$ konvergen, maka berdasarkan uji limit pada deret, diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|$ konvergen. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|$ konvergen maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Diketahui X ruang metrik lengkap bernilai kompleks, karena $\{x_n\}$ barisan Cauchy, maka terdapat $x^* \in X$ sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Selanjutnya akan ditunjukkan $T(x^*) = x^*$. Diandaikan $T(x^*) \neq x^*$, berdasarkan (1), karena F fungsi monoton naik tegas maka

$$d\big(T(x),T(y)\big) \prec \alpha.d(x,y) + \beta.d\big(x,T(x)\big) + \gamma.d\big(y,T(y)\big) + \mu.d\big(x,T(y)\big) + L.d\big(y,T(x)\big), \tag{6}$$

akibatnya

$$\begin{aligned} d\big(x^*,T(x^*)\big) &\precsim d(x^*,x_{n+1}) + d\big(T(x_n),T(x^*)\big) \\ &\prec d(x^*,x_{n+1}) + \alpha.d(x_n,x^*) + \beta.d\big(x_n,T(x_n)\big) + \gamma.d\big(x^*,T(x^*)\big) + \mu.d\big(x_n,T(x^*)\big) \\ &\quad + L.d\big(x^*,T(x_n)\big) \\ &= d(x^*,x_{n+1}) + \alpha.d(x_n,x^*) + \beta.d(x_n,x_{n+1}) + \gamma.d\big(x^*,T(x^*)\big) + \mu.d\big(x_n,T(x^*)\big) \\ &\quad + L.d(x^*,x_{n+1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Selanjutnya karena $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, maka jika pertidaksamaan (7) dikenakan limit untuk n menuju tak hingga diperoleh

$$\left|d\big(x^*,T(x^*)\big)\right| \leq \left|\gamma.d\big(x^*,T(x^*)\big)\right| + \left|\mu.d\big(x^*,T(x^*)\big)\right| = |\gamma+\mu| \left|d\big(x^*,T(x^*)\big)\right|. \tag{8}$$

Perhatikan bahwa $0 \prec 1 - \gamma - \mu$ atau $\gamma + \mu \prec 1$, akibatnya $|\gamma + \mu| < 1$, sehingga berdasarkan (8) diperoleh $\left|d\left(x^*, T(x^*)\right)\right| \leq |\gamma + \mu|\left|d\left(x^*, T(x^*)\right)\right| < \left|d\left(x^*, T(x^*)\right)\right|$ yang merupakan suatu kontradiksi. Jadi haruslah $T(x^*) = x^*$.

Selanjutnya akan dibuktikan ketunggalan titik tetapnya jika $\alpha + \mu + L \precsim 1$ dipenuhi. Andaikan terdapat $y^* \in X$ sehingga $T(y^*) = y^*$ dengan $x^* \neq y^*$. Berdasarkan (6) diperoleh

$$d(x^*, y^*) \prec \alpha. d(x^*, y^*) + \beta. d(x^*, x^*) + \gamma. d(y^*, y^*) + \mu. d(x^*, y^*) + L. d(y^*, x^*),$$

$$\Rightarrow d(x^*, y^*) \prec (\alpha + \mu + L) d(x^*, y^*) \precsim d(x^*, y^*),$$

yang merupakan suatu kontradiksi. Jadi dapat disimpulkan bahwa T memiliki titik tetap tunggal. ■

Akibat 7. Diberikan ruang metrik lengkap bernilai kompleks $(X. d)$ dan pemetaan $T: X \to X$. Jika

$$d\left(T(x), T(y)\right) \precsim \alpha. d(x, y) + \beta. d\left(x, T(x)\right) + \gamma. d\left(y, T(y)\right) + \mu. d\left(x, T(y)\right) + L. d\left(y, T(x)\right),$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan $0 \prec d(T(x), T(y))$, di mana $0 \precsim \alpha, \beta, \gamma, \mu, L$, $\gamma \neq 1$, dan $\alpha + \beta + \gamma + 2\mu = 1$ maka T memiliki titik tetap. Lebih lanjut, jika $\alpha + \mu + L \precsim 1$, maka T memiliki titik tetap tunggal $x^* \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, barisan $\{T^n(x)\}$ konvergen ke x^*.

Akibat 8. Diberikan ruang metrik lengkap bernilai kompleks $(X. d)$ dan pemetaan $T: X \to X$. Jika terdapat $0 \prec r$ dan $F \in \mathcal{F}_c$ sehingga $r + F\left(d\left(T(x), T(y)\right)\right) \precsim F\left(d(x, y)\right)$, untuk setiap $x, y \in X$ dengan $0 \prec d(T(x), T(y))$, maka T memiliki titik tetap tunggal $x^* \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, barisan $\{T^n(x)\}$ konvergen ke x^*.

Karena ruang metrik lengkap bernilai kompleks lebih umum daripada ruang metrik lengkap, maka dari Teorema 6, Teorema yang telah dibuktikan oleh Cosentino dan Vetro [5] pun dapat terbukti, berikut adalah teoremanya.

Akibat 9. Diberikan ruang metrik lengkap $(X. d)$ dan pemetaan $T: X \to X$. Jika terdapat $F \in \mathcal{F}$ pada X, dan $r > 0$ sehingga

$$r + F\left(d\left(T(x), T(y)\right)\right) \leq F\left(\alpha. d(x, y) + \beta. d\left(x, T(x)\right) + \gamma. d\left(y, T(y)\right) + \mu. d\left(x, T(y)\right) + L. d\left(y, T(x)\right)\right),$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan $d(T(x), T(y)) > 0$, di mana $\alpha, \beta, \gamma, \mu, L \geq 0$, $\gamma \neq 1$, dan $\alpha + \beta + \gamma + 2\mu = 1$, maka T memiliki titik tetap. Lebih lanjut, jika $\alpha + \mu + L \leq 1$, maka T memiliki titik tetap tunggal $x^* \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, barisan $\{T^n(x)\}$ konvergen ke x^*.

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian teorema di atas, dapat disimpulkan bahwa pemetaan kontraksi-F_c tipe Hardy-Roger di ruang metrik lengkap bernilai kompleks memiliki titik tetap tunggal dengan syarat $\gamma \neq 1$, $0 \precsim \alpha, \beta, \gamma, \mu, L$, dan $\alpha + \beta + \gamma + 2\mu = 1$, maka T memiliki titik tetap. Lebih lanjut, jika $\alpha + \mu + L \precsim 1$, maka T memiliki titik tetap tunggal $x^* \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, barisan $\{T^n(x)\}$ konvergen ke x^*. Karena ruang metrik lengkap bernilai kompleks lebih umum daripada ruang metrik lengkap, maka dengan mengganti ruang metrik lengkap bernilai kompleks menjadi ruang metrik lengkap, diperoleh beberapa akibat di antaranya adalah teorema yang telah dibuktikan oleh Cosentino dan Vetro. Mengingat banyaknya jenis pemetaan lain pada ruang metrik yang telah dibuktikan eksistensi titik tetapnya, maka dapat diteliti lebih lanjut jenis pemetaan tersebut di dalam ruang metrik bernilai kompleks.

Referensi

[1] Ahmad, J., Azam, A., & Saejung, S. (2014). Common fixed point result for contractive mappings in complex valued metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 67.

[2] Almezel, S., Ansari, Q. H., & Khamsi, M. A. (2014). *Topics in fixed point theory.* USA: Springer.

[3] Azam, A., Fisher, B., & Khan, M. (2011). Common fixed point theorems in complex valued metric spaces. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 32(3), 243-253.

[4] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis.* Urbana: John Wiley & Sons.

[5] Cosentino, V., & Vetro , P. (2014). Fixed point result for F-contractive mappings of Hardy-Roger-Type. *Filomat*, 28, 715-722.

[6] Mukheimer, A. A. (2014). Some common fixed point theorems in complex valued b-metric spaces. *Scientific World Journal*, ID 587825.

[7] Pasangka, I. G. (2015). *Teorema titik tetap terkait jarak-ω.* Yogyakarta: Tesis UGM.

[8] Popescu, O., & Stan, G. (2020). Two fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. *Symmetry*, 12(1): 58.

[9] Sitthikul, K., & Saejung , S. (2012). Some fixed point theorems in complex valued metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 189.

[10] Wardowski, D. (2012). Fixed point of a new type of contractive mappings in complete metric space. *Fixed Point Theory Appl*, 94.