

Optimization of Assignment Problems using Hungarian Method at PT. Sicepat Express Ambon Branch (Location: Java City Kec. Ambon Bay)

Ardial Meik^{1*}, V. Y. I. Ilwaru¹, M. E. Rijoly¹, B. P. Tomasouw¹

¹Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Patimura.
Kota Ambon, 97233, Maluku, Indonesia.

*Email: meikardial@gmail.com

Manuscript submitted : Maret 2022;

Accepted for publication : April 2022.

Doi : <https://doi.org/10.30598/tensorvol3iss1pp23-32>

Abstract: One of the special cases of problems in linear programming that is often faced by a company in allocating its employees according to their abilities is the assignment problem. The assignment problem can be solved using the Hungarian Method. In applying the Hungarian method, the number of employees assigned must be equal to the number of jobs to be completed. In this study, the Hungarian method was used to optimize the delivery time of goods from PT. Sicepat Express Ambon Branch – Java City. To solve the assignment problem at PT. Sicepat Express Ambon Branch – Java City, the required data includes employee names, destination locations, and delivery times. Before using the Hungarian method, the total delivery time of 7 employees at 10 destinations is 955 minutes. However, after using the Hungarian method, the total delivery time of 7 employees at 10 destination locations was 440 minutes. It can be seen that there are 515 minutes of time efficiency. We also solved this assignment problem using the QM For Windows Version 5.2 software and got the same amount of time, which is 440 minutes.

2010 Mathematical Subject Classification: 90C05, 90C08.

Keywords: Assignment Problem, Hungarian Method, Linear Programming.

1. Pendahuluan

Berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi informasi yang berhubungan dengan berkembangnya pula dunia usaha, baik usaha kecil, usaha menengah dan usaha yang besar. Seiring berkembangnya dunia usaha, kita semakin memerlukan teknologi yang mampu membantu pekerjaan agar bisa terhubung dengan atasan, petugas dan para konsumen. Dalam dunia usaha seringkali kita dihadapkan dengan berbagai macam masalah.

Masalah yang sering terjadi adalah masalah penugasan. Masalah penugasan merupakan masalah khusus dari pemrograman linier (Linear Programming). Pemrograman linier adalah bagian dari matematika terapan yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah pengalokasian tugas-tugas yang terbatas secara optimal. Salah satu teknik penyelesaian masalah penugasan adalah dengan menggunakan metode Hungarian yang ditemukan dan dipublikasikan oleh Harold Kuhn pada tahun 1955. Pada masalah penugasan, asumsinya adalah jumlah petugas harus sama dengan jumlah pekerjaan [1]. Masalah penugasan adalah masalah yang hanya mempunyai satu tujuan optimalisasi, yaitu memaksimalkan atau meminimalkan suatu tugas daya. Tujuan dari masalah penugasan adalah untuk menetapkan setiap tugas yang sesuai pada pekerja, sehingga total pengeluaran semua tugas daya dalam menyelesaikan semua tugas dapat optimal.

Oleh karena itu untuk menyelesaikan masalah penugasan dengan mengoptimalkan total waktu dalam pengantaran barang dapat dilakukan dengan metode Hungarian. Tahap pertama yang dilakukan dalam menyelesaikan masalah penugasan yaitu dengan mengambil data yang meliputi nama petugas, alamat tujuan, dan waktu perjalanan petugas dalam pengantaran barang. Selanjutnya membentuk model matematika kedalam program linear untuk diselesaikan menggunakan metode Hungarian.

2. Metodologi Penelitian

2.1. Pemrograman Matematika

Pemrograman matematika (Mathematical Programming) adalah pembuatan model matematika atas suatu permasalahan yang sedang dihadapi dan menggunakan sebuah proses atau prosedur yang dapat diprogram, disebut algoritma, untuk mendapatkan solusinya model-model pemrograman matematika yang banyak digunakan adalah pemrograman linier (linier programming) [2]. Pemrograman linear menurut [3] didefinisikan sebagai metode matematis yang berbentuk linear untuk menentukan suatu penyelesaian optimal dengan cara memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan terhadap suatu susunan kendala.

Pemrograman matematis memuat beberapa variabel keputusan, fungsi tujuan dan beberapa fungsi kendala dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan [2], dimana :

1. Variabel-variabel keputusan adalah variabel-variabel yang menggambarkan keputusan – keputusan yang akan dibuat.
2. Fungsi tujuan adalah fungsi dari harapan atau kriteria yang ingin dicapai, yang selanjutnya akan dimaksimalkan atau minimalkan.
3. Batasan-batasan atau kendala adalah kondisi atau syarat yang membatasi nilai-nilai dari variabel keputusan yang mungkin.
4. Daerah solusi yang layak (feasible space) adalah daerah dari nilai-nilai variabel keputusan yang memenuhi semua kendala, atau semua kemungkinan kombinasi variabel keputusan yang memenuhi semua kendala.
5. Banyak solusi optimal (multiple optimal solution) adalah nilai fungsi tujuan paling baik dengan jumlah dua atau lebih.

2.2. Masalah Penugasan

Masalah penugasan (Assignment Problem) merupakan suatu kasus khusus dari program linier pada umumnya. Dalam dunia usaha (bisnis) dan industri, manajemen sering menghadapi masalah-masalah yang berhubungan dengan penugasan optimal dari bermacam-macam tugas yang produktif atau personalia yang mempunyai tingkat efisiensi yang berbeda-beda untuk tugas yang berbeda-beda pula[5].

Jika seandainya suatu perusahaan mempunyai m petugas yaitu;

$P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_m$

yang akan ditugasi untuk menyelesaikan n tugas yaitu;

$$T_1, T_2, \dots, T_j \dots T_n$$

dimana petugas i mengerjakan tugas j dengan kontribusi C_{ij} .

C_{ij} menyatakan waktu untuk menetapkan tugas ke-j pada petugas ke-i. Satuan untuk C_{ij} dapat berupa rupiah, km, jam atau apapun yang sesuai dengan masalah yang dihadapi [6]. Ilustrasi masalah penugasan terdapat pada Tabel dibawah ini;

Tabel 1. Kontribusi Penugasan

		Tugas				
Petugas	T_1	T_2	T_3	$\dots T_j$	$\dots T_n$	
P_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	$\dots C_{1j}$	$\dots C_{1n}$	
P_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	$\dots C_{2j}$	$\dots C_{2n}$	
...						
P_i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	$\dots C_{ij}$	$\dots C_{in}$	
...						
P_m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	$\dots C_{mj}$	$\dots C_{mn}$	

Dalam hal ini berlaku :

$C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} + \dots + C_{in} = 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Ini artinya pada setiap tugas i hanya ada satu C_{ij} yang bernilai 1 sedangkan yang lainnya 0.

$C_{1j} + C_{2j} + \dots + C_{mj} = 1$ untuk $j = 1, 2, \dots, m$. Ini artinya pada setiap tujuan j hanya ada satu C_{ij} yang bernilai 1 sedangkan yang lainnya 0.

[1].

2.3. Metode Hungarian

Metode Hungarian ditemukan oleh Harlod Kuhn pada tahun 1955 dan dikembangkan oleh James Munkres pada tahun 1957. Untuk dapat menerapkan metode Hungarian jumlah tugas-tugas yang ditugaskan harus sama dengan jumlah tugas yang akan diselesaikan, selain itu setiap tugas harus ditugaskan hanya untuk satu tugas $\sum P_i = \sum T_j$ [7]. Jadi masalah penugasan akan mencakup sejumlah n tugas yang mempunyai m tugas. Ada n! (n faktorial) penugasan yang mungkin dalam suatu masalah. Langkah-langkah penyelesaian penugasan dengan menggunakan metode Hungarian [4] adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi dan penyederhanaan masalah dalam bentuk tabel penugasan
2. Mencari nilai terkecil untuk setiap baris, lalu mengurangkan semua nilai dalam baris tersebut dengan nilai terkecil.
3. Memastikan semua baris dan kolom sudah memiliki nilai nol. Apabila kolom yang belum memiliki nilai nol, maka cari nilai terkecil dalam kolom tersebut dan mengurangkan semua nilai dalam kolom tersebut dengan nilai terkecilnya.
4. Menutup semua nilai nol dengan garis vertikal atau horizontal seminimal mungkin, sehingga diperoleh beberapa kemungkinan [8] sebagai berikut:

- a) Bila banyaknya garis penutup nol sama dengan jumlah baris atau kolom maka tabel optimal.
 - b) Bila banyaknya garis penutup nol kurang dari jumlah baris atau kolom, maka tabel belum optimal, sehingga tabel harus diperbaiki dengan cara berikut:
 - c) Mencari nilai terkecil dari setiap nilai yang tidak tertutup garis dan mengurangi nilai yang tidak tertutup garis tersebut dengan nilai terkecilnya. Sedangkan, semua nilai yang tertutup dua garis harus ditambah dengan nilai terkecil dari nilai yang tidak tertutup garis. Untuk nilai yang tertutup satu garis nilainya tetap. Selanjutnya mengulangi langkah 4.
5. Jika tabel sudah optimal, selanjutnya mencari baris atau kolom yang hanya memuat satu nilai nol. Nilai tersebut dipilih, kemudian baris dan kolomnya dicoret. Sisa nilai nol yang belum dicoret selanjutnya dapat diproses seperti langkah 5 di atas.
 6. Setelah menemukan satu nilai nol di setiap baris atau kolom, maka penugasan telah selesai. Kolom dan baris nilai nol tersebut merupakan pasangan petugas dan tugas.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada PT. SiCepat Express masalah penugasan yang dialami adalah bagaimana menempatkan petugas pengantaran barang pada tempat tujuan, sehingga mendapatkan hasil yang optimal. Jumlah petugas yang ditugaskan untuk mengantarkan barang sebanyak 7 orang serta lokasi tujuan sebanyak 10 tempat. Masing-masing petugas mempunyai waktu untuk mengantarkan barang berbeda-beda, sehingga membutuhkan perhitungan untuk menugaskan petugas tersebut. Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Hungarian.

Data yang digunakan adalah waktu perjalanan masing-masing petugas dalam mengantarkan barang dari kantor PT. SiCepat Express yang berada di Kotajawa ke lokasi tujuan. Hari efektif kerja dan tugas yang ditetapkan PT. SiCepat Express adalah Senin sampai Sabtu pada bulan Oktober 2021, dengan asumsi bahwa setiap petugas menggunakan motor dengan ukuran dan kapasitas mesin yang berbeda sebagai alat transportasi dan kondisi lalu lintas yang berbeda pula.

Tabel 2. Waktu Pengantaran Barang (Dalam Menit)

Tujuan Petugas	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Julianto	45	60	75	100	110	120	150	180	30	60
Aprilio Pesiwarissa	30	70	80	90	120	125	145	190	35	75
Ibnu Djufar Tahalua	45	50	70	95	105	115	155	170	40	65
Isham	45	60	80	95	115	115	135	180	30	70
Ambran Yahya	60	60	95	100	110	125	145	190	40	60
Faris Laode Djiri	40	75	80	105	100	120	150	190	35	70
Riswan Sujono	45	60	75	95	115	125	155	180	30	75

Keterangan :

- A. Poka dan Rumah Tiga
- B. Hunut Durian Patah
- C. Nania
- D. Negri Lama
- E. Passo
- F. Lemba Argo
- G. Latta
- H. Hutumuri
- I. Wayame
- J. Laha

Berikut adalah hasil waktu masing-masing karyawan dalam mengantarkan barang dengan melihat waktu minimum sebelum menggunakan metode Hungaria.

Sebelum menggunakan metode Hungarian

No	Petugas	Tujuan	Waktu
1	Julianto	Poka Rumah Tiga	45
2	Aprilio Pesiwarissa	Passo - Hutumuri	120 + 190=310
3	Ibnu Djufar Tahalua	Wayame - Laha	40 + 65=105
4	Isham	Latta	135
5	Ambran Yahya	Lemba Argo	125
6	Faris Laode Djiri	Hunut Durian Patah	75
7	Riswan sujono	Nania - Negri Lama	75 + 95=160

Total waktu sebelum menggunakan metode Hungarian **955 menit**

Langkah pengelesaian 1

Petugas \ Tujuan	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Julianto	45	60	75	100	110	120	150	180	30	60
Aprilio Pesiwarissa	30	70	80	90	120	125	145	190	35	75
Ibnu Djufar Tahalua	45	50	70	95	105	115	155	170	40	65
Isham	45	60	80	95	115	115	135	180	30	70
Ambran Yahya	60	60	95	100	110	125	145	190	40	60
Faris Laode Djiri	40	75	80	105	100	120	150	190	35	70
Riswan Sujono	45	60	75	95	115	125	155	180	30	75
dummy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
dummy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
dummy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Langkah Penyelesaian 2

Petugas \ Tujuan	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Julianto	15	30	45	70	80	90	120	150	0	30

Aprilio Peswarissa	0	40	50	60	95	95	115	160	5	45
Ibnu Djufar Tahalua	5	10	30	55	65	75	115	130	0	25
Isham	15	30	50	65	85	95	105	150	0	40
Ambran Yahya	20	20	55	60	70	85	105	150	0	20
Faris Laode Djiri	5	40	65	70	65	90	120	155	0	35
Riswan Sujono	15	30	45	55	85	95	125	150	0	45
<i>dummy</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>dummy</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>dummy</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Langkah Penyelesaian 3

Tujuan \ Petugas	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Julianto	15	30	45	70	80	90	120	150	0	30
Aprilio Peswarissa	0	40	50	60	95	95	115	160	5	45
Ibnu Djufar Tahalua	5	10	30	55	65	75	115	130	0	25
Isham	15	30	50	65	85	95	105	150	0	40
Ambran Yahya	20	20	55	60	70	85	105	150	0	20
Faris Laode Djiri	5	40	65	70	65	90	120	155	0	35
Riswan Sujono	15	30	45	55	85	95	125	150	0	45
<i>dummy</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>dummy</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>dummy</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Langkah Penyelesaian 4

Pada langkah ini jika garis yang ditarik tidak sama dengan jumlah baris atau kolom maka tabel belum optimal. Selanjutnya tabel harus diperbaiki seperti langkah Metode Hungarian yakni mencari nilai terkecil pada baris dan kolom yang tidak tertutup oleh nilai nol dan mengurangkannya pada baris dan kolom yang tidak tertutup oleh nilai nol. Pada baris dan kolom yang tertutup oleh satu garis nilainya tetap sedangkan untuk nilai yang tertutup oleh dua garis ditambahkan. Jika nilai garis yang dilakukan belum optimal maka lakukan hingga jumlah garis sama dengan jumlah kolom. Selanjutnya ditarik garis seperti pada tabel optimal dibawah ini:

Langkah penyelesaian 5

Tujuan \ Petugas	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Julianto	10	5	0	5	15	20	50	80	0	5
Aprilio Peswarissa	0	20	10	0	30	30	50	95	10	25
Ibnu Djufar Tahalua	15	0	0	5	15	20	60	70	15	15
Isham	10	5	0	0	20	15	35	80	0	15
Ambran Yahya	20	0	5	0	5	20	40	85	0	0
Faris Laode Djiri	0	15	0	5	0	25	45	85	0	10
Riswan Sujono	10	5	0	0	20	25	55	80	0	20
<i>dummy</i>	65	45	25	5	5	0	0	0	70	45
<i>dummy</i>	65	45	25	5	5	0	0	0	70	45
<i>dummy</i>	65	45	25	5	5	0	0	0	70	45

Terlihat bahwa jumlah garis sama dengan jumlah garis dan kolom $10 = 10$ maka tabel diatas sudah optimal. Sehingga tabel penugasan berhenti di langkah ini, dengan demikian kita dapat melihat pada tabel penugasan setelah menggunakan Metode Hungarian serta masing-masing petugas dan masing-masing tugas yang ditugaskan dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel Waktu Pengantaran Barang (Dalam Menit) Hasil Penugasan

Petugas \ Tujuan	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Julianto	45	60	75*	100	110	120	150	180	30	60
Aprilio Pesiwarissa	30*	70	80	90	120	125	145	190	35	75
Ibnu Djufar Tahalua	45	50*	70	95	105	115	155	170	40	65
Isham	45	60	80	95	115	115	135	180	30*	70
Ambran Yahya	60	60	95	100	110	125	145	190	40	60*
Faris Laode Djiri	40	75	80	105	100*	120	150	190	35	70
Riswan Sujono	45	60	75	95*	115	125	155	180	30	75
dummy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
dummy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
dummy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

*Nilai penugasan optimal

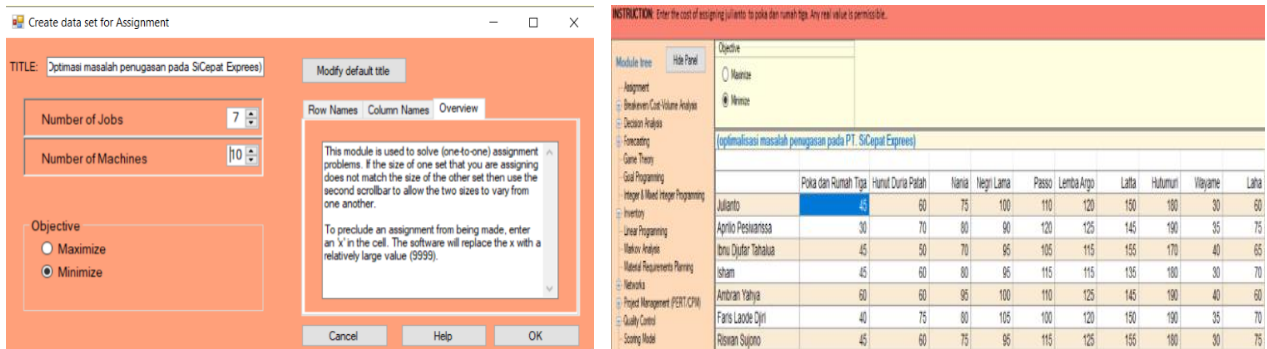
Tabel Sesudah menggunakan metode Hungarian

No	Petugas	Tujuan	Waktu
1	Julianto	Nania	75
2	Aprilio Pesiwarissa	Poka Rumah Tiga	30
3	Ibnu Djufar Tahalua	Hunut Durian Patah	50
4	Isham	Wayame	30
5	Ambran Yahya	Laha	60
6	Faris Laode Djiri	Passo	100
7	Riswan Sujono	Negeri Lama	95

Total waktu sesudah menggunakan metode Hungarian **440 menit**.

4. Qm for Windows

Berikut ini akan dibuat perhitungan menggunakan aplikasi QM For Windows Version 5.2. dalam proses komputasi masalah penugasan ini diperoleh tampilan seperti pada gambar I dan II berikut ini;



Gambar I dan II

Selanjutnya Langkah berikutnya klik Solve sehingga diperoleh tiga output yaitu *Marginal Costs*, *Assignment Result* dan *Assignment List* seperti pada gambar III, IV, V berikut ini:

Marginal Costs										
(optimalisasi masalah penugasan pada PT. SiCepat Express) Solution										
	Poka dan Rumah Tiga	Hunut Duria Patah	Nania	Negri Lama	Passo	Lemba Argo	Latta	Hutumuri	Wayame	Laha
Julianto			0		5		10	40	70	0
Aprilio Pes.			25	20	10	25	30	50	95	20
Ibnu Djufa.	10			5	10	5	15	55	70	20
Isham	0	0	5			5	5	25	70	
Ambran Y.	15	0	20	5	0	15	35	80		10
Faris Laod.	5	25	15	20		20	50	90	15	20
Dummy	0					5	15	45	70	0

Assignment Results										
(optimalisasi masalah penugasan pada PT. SiCepat Express) Solution										
Optimal solution value = 440	Poka dan Rumah Tiga	Hunut Duria Patah	Nania	Negri Lama	Passo	Lemba Argo	Latta	Hutumuri	Wayame	Laha
Julianto	45	60	Assign 75	100	110	120	150	180	30	60
Aprilio Peswarissa	Assign 30	70	80	90	120	125	145	190	35	75
Ibnu Djufar Tahalua	45	Assign 50	70	95	105	115	155	170	40	65
Isham	45	60	80	95	115	115	135	180	Assign 30	70
Ambran Yahya	60	60	95	100	110	125	145	190	40	Assign 60
Faris Laode Djiri	40	75	80	105	Assign 100	120	150	190	35	70
Riswan Sujono	45	60	75	Assign 95	115	125	155	180	30	75
Dummy	0	0	0	0	0	Assign 0	Assign 0	Assign 0	0	0

Module tree			
<ul style="list-style-type: none"> Assignment Breakeven/Cost-Volume Analysis Decision Analysis Forecasting Game Theory Goal Programming Integer & Mixed Integer Programming Inventory Linear Programming Markov Analysis Material Requirements Planning Networks Project Management (PERT/CPM) Quality Control Scoring Model Simulation 	Hide Panel	Objective	
		<input type="radio"/> Maximize <input checked="" type="radio"/> Minimize	
(optimalisasi masalah penugasan pada PT. SiCepat Express)			
JOB	Assigned to	Cost	
Julianto	Nania	75	
Aprilio Peswarissa	Poka dan Rumah Tiga	30	
Ibnu Djufar Tahalua	Hunut Duria Patah	50	
Isham	Wayame	30	
Ambran Yahya	Laha	60	
Faris Laode Djiri	Passo	100	
Riswan Sujono	Negri Lama	95	
Total		440	

Gambar III, IV, dan V

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan bahwa terdapat waktu penempatan paling optimal bagi ke-7 petugas yakni 440 menit. Dari ke-10 tujuan terdapat 3 tujuan yang tidak ada petugas yang ditugaskan. Hasil penentuan tujuan bagi ke-7 petugas. Jadi dapat disimpulkan bahwa pengalokasian karyawan pada SiCepat Express belum tepat dapat dilihat dari total waktu perjalanan dalam mengantarkan barang sebelum menggunakan metode Hungarian. Setelah menggunakan metode Hungarian, total waktu pengantaran barang lebih optimal atau lebih pendek. Dapat dilihat bahwa terdapat efisiensi waktu perjalanan mengantarkan barang sebesar 440 menit.

Daftar Pustaka

- [1] Harini, A. (2017). Metode Hungarian. CV. L&J Exprees Malang. Jurnal Intensif. ISSN: 2580-409X
- [2] Purwanto, E. (2008). Penerapan Metode Linier Programming. Jurnal Teknik Industri, 9(1), 8-13.
- [3] Siswanto. (2007). Operation Research Jilid 2. Yogyakarta: Erlangga
- [4] Bariasti, S., & Lestari, A. (2017). Penyelesaian Masalah Penugasan Menggunakan Metode Hungarian dan Pinalti. Sains Matematika Dan Statistika, 3(1), 1.
- [5] Erlinda Rahmawati, N. S. (2015). Optimalisasi masalah penugasan menggunakan metode hungarian. Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya(Bimaster), volume 04, No. 3, hlm. 363-370.
- [6] Moore, M. H., Estrich, S., McGillis, D., & Spelman, W. (1984). *Dangerous Offenders: The Elusive Target of Justice*. Cambridge: Harvard University Press.
- [6] Kakiay, T. J. (2008). Pemrograman Linier. Yogyakarta: Andi.

- [7] Taha, H. A. (1996). Riset Operasi. Jakarta: Binarupa Aksara.
- [8] Lubis, J. R., & Rambe, E. (2018). Melalui Mata Kuliah Media Komputer Dengan Penugasan (Assignment) Menggunakan Metode Hungarian. Jurnal Education, 3(2), 8-15.

