Variance
Journal of Statistics and Its Applications
Volume 4 Nomor 2 | Desember 2022
p-ISSN: 2685-8738 e-ISSN: 2685-872X
doi: 10.30598/variancevol4iss2page99-116

PENENTUAN JUMLAH POPULASI DAN *TOTAL LIFETIME* MENGGUNAKAN INTEGRAL GANDA, DIAGRAM LEXIS DAN METODE GRACE-NESBITT

(*Determination the Population Number and Total Lifetime using of Multiple Integral, Lexis Diagram and Grace-Nesbiit Method*)

Agung Prabowo[1*], Silfina Nihayatul Islamiyyah[2], Zalfa Diba Adzkia[3], Ratri Maharsi[4], Annisa Wulansari[5]
[1,2,3,4,5] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Jenderal Soedirman
Jl. Dr. Suparno Utara No. 61 Kampus Unsoed, Karangwangkal, Purwokerto, 53312,
Jawa Tengah, Indonesia

e-mail corresponding author: *agung.prabowo@unsoed.ac.id*

Abstrak: *Pada model populasi penduduk stasioner, laju pertumbuhan bersifat konstan yang ditandai dengan terjadinya keseimbangan antara banyaknya kelahiran dan kematian. Pada populasi tersebut, jumlah penduduk usia muda relatif sama dengan usia dewasa. Analisis lebih tajam tentang populasi stasioner dan untuk membangun basis teoritis terkait model penduduk stasioner, perlu dibuat beberapa asumsi yaitu peluang setiap kelahiran pada periode satu tahun adalah sama dan profil kematian mengikuti tabel kehidupan tertentu yang menjadi rujukan. Pada populasi stasioner dapat dihitung total lifetime, yaitu jumlah dari total future lifetime yang masih akan dijalani oleh individu ditambah banyaknya lifetime yang telah dijalani oleh individu tersebut. Selanjutnya, untuk menghitung total lifetime dapat digunakan integral ganda dan diagram Lexis. Dalam tulisan ini, diberikan contoh penggunaan integral ganda dan diagram Lexis untuk perhitungan total lifetime. Penelitian ini diselesaikan dengan menggunakan studi literatur. Pada contoh-conoth yang diberikan, total lifetime dihitung secara manual dengan dua cara yaitu integral ganda dan diagram Lexis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua cara tersebut memberikan hasil yang sama.*

Kata Kunci: *diagram Lexis, integral ganda, metode Grace-Nesbitt, populasi stasioner, tabel kehidupan*

Abstract: *The stationary population is population growth in a constant state which shows the number of births and deaths in balance. In this population, the number of young people is equal to that of adults. For a more in-depth analysis and to build a theoretical basis for the analysis of the stationary population model, assumptions are added such as the probability of each birth in a period a year is the same and the mortality profile in the Life Table is also valid. This can also be done by calculating the total lifetime, which is the sum of the total future lifetimes that will still be lived by individuals plus the number of lifetimes that have been lived by a number of individuals. To calculate the total lifetime, multiple integrals and lexis diagrams can be used. Therefore, in this study, an example of the use of multiple integrals and lexis diagrams will be described to determine the total lifetime. By using a literature study method, namely the method of obtaining data from the results of reading and studying and processing the data obtained. To determine the total lifetime can be done using multiple integrals and lexis diagrams through manual calculations. By using multiple integrals and lexis diagrams, both methods get the same results.*

Keywords**:** *Grace-Nesbitt method, life table, Lexis diagram, multiple integral, stationary population.*

1. PENDAHULUAN

Penduduk adalah sekumpulan individu yang bertempat tinggal di suatu wilayah dengan ketentuan hukum yang berlaku. Pertumbuhan penduduk pada suatu negara dipengaruhi oleh berbagai variabel seperti

https://ojs3.unpatti.ac.id/index.php/variance/
Submitted: 2022-09-27
Accepted: 2023-03-05

kelahiran (natalitas), kematian (mortalitas), dan perpindahan penduduk (emigrasi/migrasi). Jumlah penduduk yang besar tanpa diimbangi oleh kualitas dari penduduk tersebut akan menghambat pertumbuhan ekonomi dari negara yang bersangkutan.

Berdasarkan komposisi penduduk menurut umur dan jenis kelamin, karakteristik penduduk suatu negara dibedakan menjadi beberapa kelompok seperti ekspansif, konstraksi, dan stasioner. Penduduk stasioner adalah pertumbuhan penduduk dalam keadaan tetap yang menunjukkan jumlah kelahiran dan kematian seimbang. Dalam populasi ini, jumlah penduduk usia muda seimbang dengan usia dewasa. Penduduk dalam keadaan stasioner akan mengalami pertambahan yang stabil di masa yang akan datang. Contoh negara yang mempunyai penduduk stasioner adalah negara maju seperti Singapura dan Swedia. Untuk analisis lebih mendalam dan membangun untuk landasan teoritis untuk analisis model populasi stasioner, ditambahkan asumsi seperti peluang tiap kelahiran dalam periode 1 tahun adalah sama dan profil mortalitas pada tabel kehidupan yang digunakan juga sama. Hal ini dapat dilakukan dengan menghitung *total lifetime* yaitu jumlah dari waktu hidup masa depan yang masih akan dijalani individu ditambah dengan waktu hidup yang telah dijalani individu tersebut. Selanjutnya, untuk menghitung *total lifetime* dapat digunakan integral ganda dan diagram Lexis. Sedangkan pembahasan lengkap tentang masalah kependudukan secara matematis dapat ditemukan pada [1].

Dalam tabel kehidupan atau lebih tepatnya disebut *number-living column*, terdapat tiga karakteristik berikut ini yang terkait dengan tabel kehidupan sebagai model populasi stasioner [2], yaitu:

1. terdapat himpunan peluang yang disimbolkan dengan l_{x+n}/l_x menyatakan seorang individu yang saat ini berusia x akan terus hidup hingga mencapai usia $x+n$;
2. terdapat sejumlah l_x orang yang masih hidup dari dengan sejumlah l_0 bayi yang lahir pada waktu yang sama (disebut kohor), dan selanjutnya sejumlah l_x orang akan menjalani kehidupan bersama;
3. terdapat suatu populasi yang bersifat stasioner, yaitu total banyaknya penduduk berdasarkan distribusi usia akan tetap sehingga pada sebarang titik waktu akan terdapat ${}_nL_x = \int_0^n l(x+t)\,dt$ orang yang hidup tepat antara usia x dan $x+n$.

Gagasan pertama kali tentang diagram Lexis dimunculkan dalam [3]. Menurut [4], Wilhelm Lexis merupakan pionir dalam riset-riset demografi. Diagram Lexis digunakan untuk menggambarkan peristiwa-peristiwa demografi dengan menggunakan dimensi waktu ganda. Masih menurut [4], wajar jika terdapat klaim bahwa ahli demografi di seluruh dunia tidak akan dapat membayangkan demografi tanpa diagram Lexis.

Penggunaan diagram Lexis antara lain ditemukan pada literatur-literatur yang ditulis oleh Brown [5], Vandeschrick [6], Feeney [7], Irma [8], Rau, Bohk-Ewald, Muszynska, dan Vaupel [9]. Scholey dan Willekens [10] mengembangkan diagram Lexis untuk keperluan visualisasi komposisi. Penggunaan lainnya dari diagram Lexis diberikan contohnya oleh [11] dan [12] dalam bidang informatika medis.

Menurut [13], model Cox yang umumnya digunakan pada analisis survival, dapat digunakan pada lebih banyak kasus. Dari sudut pandang demografi, penggunaan model Cox dengan visualisasi data menggunakan diagram Lexis menempatkan waktu sebagai variabel kovariat (penjelas) dengan berbagai jenis skala waktu. Salah satu model Cox adalah regresi Cox yang pembahasannya ditemukan pada [14]. Masalah survival data lainnya ditemukan pada [15] yang memandang data ketahanan hidup penderita kanker secara komprehensif dari sisi teori, empiris, komputasi dan aplikasi. Sedangkan [16] menangani masalah *improved survival* (ketahanan hidup yang dapat ditingkatkan) pada pasien Diabetic Nephropathy. Merujuk pada [13], maka masalah-masalah survival dapat dikaitkan dengan diagram Lexis.

Integral merupakan salah satu teori dalam matematika yang penting dan terus berkembang, baik secara teoritis maupun penerapannya. Dalam aplikasinya, integral dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari termasuk dalam bidang kependudukan. Sebagai contoh, integral ganda digunakan untuk menghitung *total lifetime* dan jumlah populasi.

Diagram Lexis adalah diagram yang melukiskan hubungan antara waktu terjadinya suatu peristiwa kependudukan dengan umur seseorang pada waktu terjadinya peristiwa tersebut. Peristiwa yang dimaksud misalnya kematian. Diagram Lexis disajikan dalam bentuk serupa diagram Kartesius dengan sumbu-x menyatakan waktu terjadinya kematian individu-individu dalam suatu populasi dan sumbu-y menyatakan usia individu-individu tersebut. Penggunaan diagram Lexis antara lain untuk menentukan *total lifetime*. Dengan demikian, *total lifetime* individu-individu dalam suatu populasi dapat dihitung dengan metode integral ganda dan diagram Lexis. Diagram Lexis juga digunakan dalam menghitung jumlah populasi. Dengan bantuan metode Grace-Nesbitt, maka dapat dihitung *total lifetime*. Keuntungan penggunaan diagram Lexis dan metode Grace-Nesbitt adalah kemudahannya dalam perhitungan dibandingkan perhitungan menggunakan integral ganda. Penggunaan diagram Lexis memerlukan metode Grace-Nesbitt.

Oleh karena itu, dalam artikel ini dijelaskan mengenai penentuan *total lifetime* yang dihitung dengan dua cara yaitu menggunakan integral ganda dan diagram Lexis. Hal ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana penggunaan integral ganda dan diagram Lexis dalam bidang kependudukan, khususnya dalam kasus menentukan *total lifetime*.

2. METODOLOGI

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka atau riset literatur (ristur) yaitu dengan memperoleh informasi dari hasil membaca dan mempelajarinya. Riset literatur yaitu metode memperoleh data dari hasil membaca maupun dan mengolah data yang didapatkan. Untuk memperoleh gambaran tentang penggunaan integral ganda, diagram Lexis, dan metode Grace-Nesbitt diberikan dua buah contoh soal, yaitu:

Contoh Soal 1:

Tentukan usia rata rata untuk individu-individu dalam suatu populasi yang saat ini berusia 30-65 dan meninggal pada usia antara 63-80!

Contoh Soal 2:

Tentukan *total lifetime* untuk individu-individu dalam suatu populasi yang saat ini berusia antara 30-65 dan meninggal pada usia antara 60-80 dalam waktu 40 tahun dari saat ini!

Usia rata-rata merupakan rasio antara *total lifetime* terhadap jumlah populasi. Untuk menghitung kedua kuantitas tersebut dapat digunakan integral ganda. Untuk menghitung jumlah populasi dapat digunakan integral ganda dan diagram Lexis. Sedangkan untuk menghitung *total lifetime* dapat digunakan integral ganda dan metode Grace-Nesbitt.

Pada contoh soal 1 dan 2, variabel y adalah umur orang saat ini yaitu $30 \le y \le 65$. Pada contoh soal 1, variabel t adalah umur saat terjadi kematian untuk orang yang berumur y, dengan $63 \le t \le 80$. sedangkan pada contoh soal 2, variabel t adalah umur saat terjadinya kematian untuk orang yang berumur y, dengan $t \ge y + 40$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Populasi Stasioner

Model merupakan alat utama dalam sains untuk menerangkan gejala alam. Contoh model dalam demografi adalah Tabel Kehidupan yang menggambarkan model penduduk stasioner. Model penduduk stasioner pertama kali dibuat oleh Thomas Halley pada tahun 1692 yang menganggap penduduk kota Breslau pada tahun1688 – 1691 bersifat stasioner.

Penduduk stasioner hanya ada dalam teori yaitu berupa Tabel Kehidupan atau sering disebut Tabel Kematian. Pada kelompok penduduk yang disebut populasi stasioner dimungkinkan adanya "kelahiran tahunan" dengan banyaknya kelahiran tahunan diasumsikan konstan sepanjang waktu. Dalam populasi stasioner juga terdapat profil mortalitas. Oleh karena banyaknya kelahiran konstan, maka dalam populasi stasioner tidak ada model fertilitas dan karakteristik populasi hanya merupakan fungsi dari mortalitas.

Asumsi-asumsi lain pada model populasi stasioner adalah:

1. kelahiran sebanyak l_0 terjadi pada periode 1 tahun sehingga kelahiran sepanjang periode tersebut berdistribusi *uniform* (seragam), artinya peluang setiap kelahiran dalam periode 1 tahun adalah sama;
2. profil mortalitas pada Tabel Kehidupan berlaku juga dalam populasi stasioner.

Berdasarkan kedua asumsi tersebut, kelahiran sepanjang periode 1 tahun tersebar merata dengan peluang yang sama selama periode tersebut (peluang seorang bayi lahir pada 1 Januari sama dengan peluang bayi tersebut lahir pada 31 Desember), serta laju kematian juga bernilai sama untuk seluruh l_0 orang kelahiran-baru.

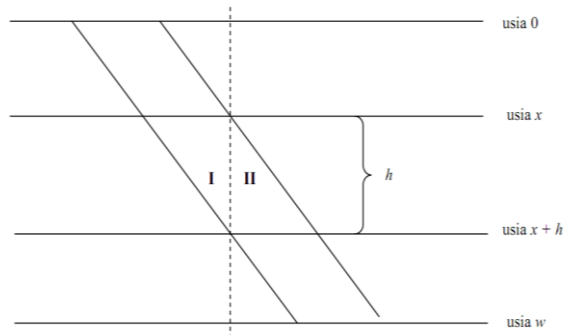
Sebagai implikasi, dari sejumlah l_0 kelahiran-baru (*new-born*) akan terdapat l_x orang yang masih hidup pada usia x. Asumsi tingkat kematian yang sama untuk seluruh kelahiran, berakibat bahwa setiap bagian pecahan yang panjangnya h dalam periode satu tahun, menyebabkan terdapat $h \cdot l_0$ kelahiran dalam interval sepanjang h tersebut, serta terdapat $h \cdot l_x$ individu yang masih hidup mencapai usia x pada interval sepanjang h untuk tiap-tiap usia x, dengan $x = 0,1,2,...,\omega$.

Oleh karena profil mortalitas yang sama berlaku untuk setiap individu yang berusia x pada kelompok kelahiran, maka seluruhnya akan memberikan angka yang sama untuk jumlah individu yang hidup mencapai usia x, yaitu $h \cdot l_x$. Oleh karena interval h dapat dibuat sekecil mungkin ($h \to 0$), maka l_x individu yang mencapai usia x dalam 1 tahun tersebar merata (*uniform*) sepanjang tahun tersebut.

Istilah stasioner diartikan bahwa semua ukuran demografis dari suatu populasi atau sub-populasi mempunyai nilai-nilai yang sama sepanjang waktu. Misalnya, banyaknya kelahiran konstan sepanjang waktu, banyaknya kematian konstan sepanjang waktu, dan lain-lain. Dalam model populasi stasioner, dimisalkan terdapat kelompok dengan kelahiran sebanyak l_0 individu yang terjadi sepanjang tahun (dari awal sampai dengan akhir tahun). Dalam populasi tersebut, profil mortalitas setiap individu mengikuti Tabel Kehidupan tertentu (misalnya Tabel Kehidupan Kanada, 1990 – 1992 untuk jenis kelamin pria). Model ini diperluas dengan menambahkan asumsi terdapat kelahiran sebanyak l_0 individu setiap tahunnya dan terjadi (terdistribusi) sepanjang tahun selama beberapa tahun yang dipilih. Asumsikan juga bahwa Tabel Kehidupan yang dijadikan sebagai profil mortalitas, berlaku untuk seluruh kelahiran pada keseluruhan tahun. Berkaitan dengan kohor, [17] memberikan metode analisis kohor berdasarkan periode umur dengan menggunakan diagram, stereogram, dan persamaan diferensial.

Pada model pertama pengamatan hanya menggunakan satu tahun kelahiran saja, misalnya tahun 1990. Artinya, pada tahun 1990 terdapat l_0 kelahiran yang terjadi dari 1 Januari 1990 sampai dengan 31 Desember 1990. Pada model kedua, pengamatan dilakukan pada banyak tahun, misalnya 1988, 1989, 1990, 1991, dan 1992. Pada tahun-tahun tersebut, banyaknya kelahiran adalah sama yaitu l_0. Persamaanya, pada kedua model memiliki profil mortalitas yang mengacu pada suatu tabel kehidupan tertentu yang dipilih (bisa sama atau berbeda). Dalam hal digunakan tabel kehidupan yang berbeda, maka profil mortalitas merujuk pada dua buah tabel kehidupan. Misalkan, model pertama menggunakan Tabel Kehidupan Kanada, dan model kedua menggunakan Tabel Kehidupan Amerika Serikat. Namun, apabila pada model kedua digunakan Tabel Kehidupan Amerika Serikat, maka harus berlaku untuk seluruh kelahiran pada masing-masing tahun. Tidak boleh misalnya 1988, 1989, 1990, 1991 menggunakan Tabel Kehidupan Amerika Serikat, namun tahun 1992 profil mortalitasnya menggunakan Tabel Kehidupan Kanada.

Misalkan, dalam model populasi stasioner ini tidak ada migrasi ke dalam (imigrasi) kecuali akibat kelahiran. Misalkan pula, tidak ada emigrasi (migrasi keluar) kecuali akibat kematian. Gambar berikut memberikan ilustrasi status populasi pada suatu titik waktu yang dinyatakan oleh garis vertikal putus-putus pada Gambar 1.



Gambar 1. Ilustrasi Populasi Penduduk Stasioner: Dalam Selang Waktu yang Sangat Pendek yaitu h, Terdapat Kelahiran dan Kematian yang Sama Banyaknya, yaitu $h \cdot l_0$.

Pada titik waktu yang diberikan, terdapat sebanyak ${}_hL_x$ orang pada populasi yang berusia x dan $x+h$ dari kelompok kelahiran total sebanyak $h \cdot l_0$. Sebanyak ${}_hL_x$ orang terbagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok I dan II yang dibatasi oleh garis tegak putus-putus. Karena kedua kelompok memiliki ukuran yang sama, maka keduanya memiliki mortalitas yang sama sehingga ${}_hL_x$ orang yang hidup antara x dan $x+h$ pada dua titik waktu yang berbeda akan mengelompok dalam kelompok yang sama ukurannya. Oleh karena h dipilih sebarang, maka komposisi umur pada populasi tersebut akan stasioner sepanjang waktu. Jika $h = 1$, artinya ada L_0 orang yang berusia antara 0 dan 1 pada setiap waktu, ada L_1 orang yang berusia antara 1 dan 2 pada setiap waktu, dan seterusnya. Ini adalah akibat dari populasi yang stasioner.

Berdasarkan persamaan $T_x = L_x + L_{x+1} + ...$ total populasi adalah T_0 sepanjang waktu. Secara umum, dapat dikatakan bahwa populasi yang berusia x atau lebih ada sebanyak T_x individu pada tiap waktu.

Terdapat l_y individu yang mencapai usia y dari suatu *survivorship group* dengan l_0 kelahiran. Turunan dari banyaknya kematian pada usia y dalam suatu tahun adalah $l_y \cdot \mu_y \, dy$ sehingga banyaknya kematian dalam satu tahun pada populasi tersebut adalah integral dari $l_y \cdot \mu_y \, dy$ untuk seluruh rentang usia y . Jadi, $D = \int_0^{\infty} l_y \cdot \mu_y dy = -l_y \Big|_0^{\infty} = -(l_\infty - l_0) = l_0$.

Pada awal waktu, dalam *survivorship group* tersebut terjadi sebanyak l_0 kelahiran. Dengan berjalannya waktu, dalam rentang usia dari 0 sampai tak hingga, banyaknya seluruh kematian adalah $D = l_0$. Hasil ini dapat diperumum untuk pecahan h dengan $0 < h < 1$. Pada Gambar 1, terdapat kelompok kelahiran sebanyak $h \cdot l_0$ yang seiring waktu akan menjadi $h \cdot l_y$ pada kelompok individu (*survivor*) yang berusia y , serta terjadi $h \cdot l_y \cdot \mu_y \, dy$ kematian pada usia y selama jangka waktu h dalam 1 tahun. Akibatnya diperoleh $\int_0^{\infty} h \cdot l_y \cdot \mu_y \, dy = h \int_0^{\infty} l_y \cdot \mu_y \, dy = h \cdot l_0$ yang sama dengan banyaknya kelahiran. Jadi, dalam selang waktu yang sangat pendek yaitu h terdapat kelahiran dan kematian yang sama banyaknya, yaitu $h \cdot l_0$.

3.2 Integral Ganda

Integral ganda (*double integrals*) adalah integral biasa/tunggal yang hasil pengintegralan pertama harus diintegralkan kembali. Integral ganda dinyatakan sebagai berikut:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

yang merupakan bentuk umum integral lipat dua tak tentu (*indifinite double integrals*) dikarenakan tidak memiliki batas atas dan batas bawah. Kemudian untuk bentuk umum integral lipat dua tertentu (*difinite double integrals*) sebagai berikut:

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Bentuk tersebut dinamakan integral lipat dua tertentu (*difinite double integrals*) karena tiap-tiar integralnya mempunyai batas atas (x_2 dan y_2) dan batas bawah (x_1 dan y_1).

Integral ganda memiliki beberapa penerapan. Penerapan yang paling jelas adalah dalam perhitungan volume benda pejal. Integral ganda juga dapat diaplikasikan ke dalam banyak hal. Dari yang sederhana, hingga aplikasi perhitungan yang sangat kompleks. Kegunaan integral dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali terutama dalam bidang matematika demografi, seperti yang dibahas pada artikel ini.

3.3 Metode Grace-Nesbitt

Dalam populasi stasioner berlaku ketiga rumus berikut:

$$\int_x^{\omega} l_y \cdot \mu_y \, dy = -l_x \tag{1}$$

$$\int_x^{\omega} l_y \, dy = -T_x \tag{2}$$

$$\int_x^{\omega} T_y \, dy = -Y_x \tag{3}$$

$$\int_x^{\omega} y \cdot l_y \, dy = -(x \cdot T_x + Y_x) \tag{4}$$

dengan

l_x : banyaknya individu yang mencapai usia x dalam satu tahun banyaknya kematian dalam satu tahun untuk individu dengan usia x atau lebih;

T_x : jumlah individu dalam populasi yang berumur x atau lebih setiap saat atau total *future lifetime* dari sebarang l_x *group*;

Y_x : *total future lifetime* dari T_x individu yang berusia x atau lebih atau *total past lifetime* setelah usia x.

Berikut ini adalah dua buah formula Grace-Nesbitt yang digunakan dalam diagram Lexis, yaitu:

$$l_x \rightarrow x \cdot l_x + T_x \tag{5}$$

$$T_x \rightarrow x \cdot T_x + 2Y_x \tag{6}$$

Persamaan (5) berarti jika suatu kelompok terdiri dari l_x individu, maka total banyaknya tahun hidup yang dilalui oleh l_x individu tersebut adalah $x \cdot l_x + T_x$. Sedangkan Persamaan (6) berarti jika suatu kelompok terdiri T_x individu berusia x atau lebih, maka *total past lifetime* sebelum usia x adalah $x \cdot T_x$, *total past lifetime* setelah usia x adalah Y_x dan *total future lifetime* adalah Y_x.

Berikut ini penurunan kedua metode Grace-Nesbitt pada Persamaan (5) dan (6). Misalkan L_x adalah suatu fungsi yang menyatakan banyaknya tahun-hidup (*life-years*) yang telah dilalui oleh sejumlah l_x individu sepanjang tahun dari usia x hingga $x+1$. Definisikan $T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + ...$ dengan T_x menyatakan *total future life-times* (total waktu hidup masa depan) yang masih akan dijalani oleh sejumlah l_x individu dalam suatu populasi.

Misalkan terdapat l_x individu yang masih hidup pada usia x dalam suatu *survivorship group*. Pilih $x = y$, maka terdapat l_y individu yang hidup pada usia y. Selanjutnya, $l_y \cdot \mu_y \, dy$ menyatakan banyaknya kematian pada usia y dan $y \cdot l_y \cdot \mu_y \, dy$ menyatakan total usia pada saat kematian dari seluruh kematian yang terjadi pada usia y. Total banyaknya tahun hidup yang dilalui oleh kelompok yang terdiri dari l_x individu adalah $\int_x^\infty y \cdot l_y \cdot \mu_y \, dy$. Dengan integral parsial $u = y$ dan $du = dy$ serta $dv = l_y \cdot \mu_y \, dy$ dan $v = \int l_y \cdot \mu_y \, dy = -l_y \Big|_x^\infty = l_x$ diperoleh $\int_x^\infty y \cdot l_y \cdot \mu_y \, dy = x \cdot l_x + T_x$ Hasil ini disebut metode Grace-Nesbitt pada Persamaan (5), yaitu $l_x \to x \cdot l_x + T_x$.

Selanjutnya, akan *total past lifetime* dan *total lifetime* untuk T_x individu berusia x atau lebih. Seluruh orang yang hidup saat ini telah mencapai usia x atau lebih, sehingga *total past lifetime* tepat hingga usia x adalah $x \cdot T_x$ yang merupakan hasil kali umur (x) dengan *total future lifetime* dari l_x grup yaitu $x \cdot (L_x + L_{x+1} + ...)$. Populasi tersebut juga menyimpan *past lifetime* untuk usia setelah x akibat seluruh anggota populasi berusia x atau lebih. Jadi,

total lifetime = *total past lifetime* + *total future lifetime*

= (*total past lifetime* sebelum usia x + *total past lifetime* setelah usia x) + *total future lifetime*

Untuk sejumlah T_x individu yang saat ini berusia x atau lebih, berlaku

i. *total past lifetime* sebelum usia x = $x \cdot T_x$

ii. *total past lifetime* setelah usia x = Y_x (dihitung dengan integral parsial)

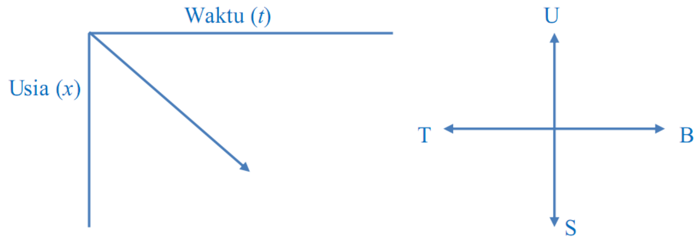
iii. *total past lifetime* = $x \cdot T_x + Y_x$

iv. *total future lifetime* = Y_x

Jadi, *total lifetime* = $x \cdot T_x + Y_x + Y_x = x \cdot T_x + 2Y_x$. Ini adalah metode Grace-Nesbitt yang kedua pada Persamaan (6). Berdasarkan hasil ini, dalam populasi stasioner, Y_x menyatakan *total future lifetime* untuk T_x yang berusia x atau lebih dan *total past lifetime* setelah usia x

3.4 Diagram Lexis

Diagram Lexis dapat digunakan untuk mendefinisikan populasi stasioner. Pada diagram Lexis dilukiskan hubungan antara waktu terjadinya suatu peristiwa kependudukan dengan umur seseorang pada waktu terjadinya peristiwa tersebut. Peristiwa ini dilukiskan dalam sebuah grafik dengan sumbu-*x* (sumbu horizontal) melukiskan skala waktu dan sumbu-y (sumbu vertikal) melukiskan skala umur atau lamanya waktu (Gambar 2). Kedua sumbu dibatasi dengan garis-garis dengan jarak yang sama.



Gambar 2. Diagram Lexis dan Petunjuk Arah

Sejarah kehidupan individu yang secara grafis digambarkan oleh sebuah garis yang titik awalnya adalah pada saat individu tersebut lahir (masuk ke dalam populasi) dan titik akhirnya adalah pada saat meninggal (keluar dari populasi). Pada diagram Lexis di Gambar 2 berlaku:

1. Garis vertikal pada diagram Lexis menyatakan umur. Penomoran umur dimulai dari umur yang paling kecil pada baris pertama dilanjutkan umur berikutnya pada baris selanjutnya.
2. Garis horizontal berisi urutan waktu (tahun) terjadinya suatu peristiwa.
3. Seluruh individu dalam populasi bergerak dengan sudut 45^0, ke arah bawah menyamping kanan.
4. Setiap pertambahan unit waktu sama dengan pertambahan usia.

Penggunaan diagram Lexis dibantu dengan arah mata angin (Gambar 2 kanan). Selain itu, penggunaan diagram Lexis juga perlu batuan formula Grace-Nesbitt. Formula Grace-Nesbitt pada Persamaan (5) dan (6) yang digunakan pada perhitungan *total lifetime* perannya pada diagram Lexis. Persamaan (5) dan (6) menjelaskan tentang *total lifetime* atas sejumlah l_x dan T_x individu. *Total lifetime* untuk sejumlah l_x individu dalam suatu kelompok adalah $x \cdot l_x + T_x$. Sedangkan, *total lifetime* untuk sejumlah T_x individu dalam suatu kelompok adalah $x \cdot T_x + 2Y_x$.

Pada artikel ini diberikan dua buah contoh soal. Kedua contoh soal tersebut dicari solusinya masing-masing dengan metode integral ganda dan metode Grace-Nesbitt serta diagram Lexis. Kedua contoh yang akan diselesaikan tersedia pada bagian Metodologi Penelitian.

3.5 Penyelesaian Contoh Soal 1 dengan Integral Ganda

Penyelesaian soal nomor 1 dengan integral ganda menggunakan persamaan:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} f(y,t).\, l_{y+t} \,.\, \mu_{y+t} \, dt \, dy \tag{7}$$

Pada Persamaan (7), $f(y,t)$ merupakan suatu fungsi yang dapat menyatakan berbagai situasi. Secara umum, untuk menghitung persamaan (5) sesuai dengan situasinya adalah dengan substitusi $f(y,t)$ oleh:

$$\textit{number of members} \quad : \quad f(y,t)=1 \tag{8}$$

$$\textit{total past lifetime} \quad : \quad f(y,t)=y \tag{9}$$

$$\textit{total future lifetime} \quad : \quad f(y,t)=t \tag{10}$$

$$\textit{total lifetime} \quad : \quad f(y,t)=t+y \tag{11}$$

Pada soal nomor 1 dihitung usia rata-rata meninggal. Usia rata-rata meninggal untuk individu individu dalam suatu populasi merupakan rasio antara *total lifetime* individu-individu dalam populasi tersebut terhadap banyaknya individu dalam populasi tersebut. Perhitungan *total lifetime* dengan substitusi fungsi $f(y,t)$ pada Persamaan (11) dan banyaknya individu dalam populasi dihitung dengan Persamaan (8).

Nyatakan usia rata-rata meninggal dengan $\frac{B}{A}$, sehingga A menyatakan banyaknya individu dalam populasi dan B menyatakan total tahun hidup (*lifetime*) yang dijalani oleh orang-orang yang berusia 30-65 tahun. Berdasarkan contoh soal 1, usia individu adalah 30-65 dan usia terjadinya kematian adalah 63-80. Berdasarkan batas-batas integrasi tersebut, Persamaan (7) dituliskan menjadi:

$$\int_{30}^{65}\int_{63-y}^{80-y} f(y,t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy \tag{12}$$

Interval usia individu dan interval waktu terjadinya kematian menunjukkan adanya *overlap* antara usia individu dan waktu terjadinya kematian sehingga integral pada Persamaan (12) dipecah menjadi dua, yaitu

$$\int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y} f(y,t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy + \int_{63}^{65}\int_{0}^{80-y} f(y,t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy \tag{13}$$

Pada Persamaan (13), untuk menghitung total tahun hidup (*total lifetime*) B ambil $f(y,t) = y + t$ dan untuk menghitung banyaknya individu A ambil $f(y,t) = 1$, maka diperoleh Persamaan (14) dan (15):

$$B = \int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy + \int_{63}^{65}\int_{0}^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy \tag{14}$$

dan

$$A = \int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy + \int_{63}^{65}\int_{0}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy \tag{15}$$

Persamaan untuk menghitung A yaitu Persamaan (15) terdiri dari dua buah suku. Penyelesaian Persamaan (15) dilakukan untuk suku pertama sisi kanan Persamaan (15), yaitu:

$$\int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy \tag{16}$$

Integral pada Persamaan (16) merupakan integral ganda. Penyelesaiannya dengan menghitung lebih dahulu integral terhadap variabel *t*, yaitu $\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}.\mu_{y+t}\,dt$. Dari $l_y.\,\mu_y dy = -l_y$ (Persamaan (1)), maka:

$$\begin{aligned}\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}.\mu_{y+t}\,dt &= l_{y+t}\Big|_{63-y}^{80-y}\\ &= (-l_{y+80-y}) - (-\,l_{y+63-y})\\ &= l_{63} - l_{80}\end{aligned}$$

Selanjutnya, Persamaan (16) akan menjadi:

$$\begin{aligned}\int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy &= \int_{30}^{63}(l_{63}-l_{80})dy\\ &= l_{63}.\,y|_{30}^{63} - l_{80}.\,y|_{30}^{63}\\ &= l_{63}(63-30) - l_{80}(63-30)\\ &= 33l_{63} - 33l_{80} \qquad (17)\end{aligned}$$

Perhitungan suku kedua sisi kanan Persamaan (15), yaitu

$$\int_{63}^{65}\int_{0}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy$$

Hitung $\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}.\mu_{y+t}\,dt$ terlebih dahulu. Dari (1) diperoleh $\int l_y\mu_y d_y = -l_y$, maka

$$\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}.\mu_{y+t}\,dt = -l_{y+t}\Big|_0^{80-y}$$
$$= \left(-l_{y+80-y}\right) - \left(-l_{y+0}\right)$$
$$= l_y - l_{80}$$

Selanjutnya,

$$\int_{63}^{65}\int_{0}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy = \int_{63}^{65}(l_y - l_{80})dy$$
$$= \int_{63}^{65} l_y d_y - \int_{63}^{65} l_{80} dy$$
$$= -T_y\Big|_{63}^{65} - l_{80}.\,y\big|_{63}^{65}$$
$$= (-T_{65}) - (T_{63}) - l_{80}(65-63)$$
$$= T_{63} - T_{65} - 2l_{80} \tag{18}$$

Sehingga banyaknya individu adalah jumlahan dari hasil perhitungan pada Persamaan (17) dan (18):

$$A = \int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy + \int_{63}^{65}\int_{0}^{80-y} l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy$$
$$= 33l_{63} - 33l_{80} + T_{63} - T_{65} - 2l_{80}$$
$$= 33l_{63} - 33l_{80} + T_{63} - T_{65} \tag{19}$$

Persamaan (14) menghasilkan nilai *B*. Seperti halnya Persamaan (15), Persamaan (14) terdiri dari dua buah suku berbentuk integral ganda. Penyelesaiannya dimulai dengan mengintegralkan suku pertama ruas kanan Persamaan (14), yaitu:

$$\int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy \tag{20}$$

Penyelesain dilakukan dengan menghitung lebih dahulu integral terhadap variabel *t*, yaitu:

$$\int_{63-y}^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}dt \tag{21}$$

Dengan menggunakan integral parsial, dimisalkan:

$$u = y + t \qquad dv = l_{y+t}.\,\mu_{y+t}dt$$
$$du = dy \qquad v = \int l_{y+t}.\,\mu_{y+t}dt = -l_{y+t}$$

maka Persamaan (21) menjadi:

$$\int_{63-y}^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}.\mu_{y+t}\,dt = u.\,v - \int v.\,du$$
$$= (y+t)\left(-l_{y+t}\right)\Big|_{63-y}^{80-y} - \int_{63-y}^{80-y} -l_{y+t}\,dt$$
$$= -(y+t)\left(-l_{y+t}\right)\Big|_{63-y}^{80-y} + \left(-T_{y+t}\right)\Big|_{63-y}^{80-y} \quad \text{(Persamaan (2))}$$
$$= \left(-(y+80-y)l_{y+80-y}\right) — (y+63-y)l_{y+63-y} +$$
$$\left(-T_{y+80-y}\right) - \left(-T_{y+63-y}\right)$$
$$= [-80l_{80} + 63l_{63}] - T_{80} + T_{63} \tag{22}$$

$$= 63l_{63} - 80l_{80} + T_{63} - T_{80}$$

Selanjutnya, Persamaan (20) menjadi

$$\int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy = \int_{30}^{63}(63l_{63} - 80l_{80} + T_{63} - T_{80})dy$$

$$= 63l_{63}.\,y - 80l_{80}.\,y + T_{63}.\,y - T_{80}.\,y|_{30}^{63}$$

$$= 63l_{63}(63-30) - 80l_{80}(63-30) + T_{63}(63-30) - T_{80}(63-30)$$

$$= 2079l_{63} - 2640l_{80} + 33T_{63} - 33T_{80} \qquad (23)$$

Integral suku kedua ruas kanan Persamaan (14), yaitu:

$$\int_{63}^{65}\int_{0}^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy$$

Perhitungan dilakukan untuk $\int_0^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt$ terlebih dahulu.

Misal: $u = y + t \qquad dv = l_{y+t}.\,\mu_{y+t}dt$

$du = dy \qquad v = \int l_{y+t}.\,\mu_{y+t}\,dt = -l_{y+t}$

$$\int_0^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt \quad = u.\,v - \int v\,du$$

$$= (y+t)\left(-l_{y+t}\right)\Big|_0^{80} - \int_0^{80-y} -l_{y+t}\,dt$$

$$= -(y+t)\left(l_{y+t}\right)\Big|_0^{80-y} + \left(-T_{y+t}\right)\Big|_0^{80-y} \quad \text{(Persamaan (2))}$$

$$= \left[\left(-(y+80-y)l_{y+80-y}\right) - (-y+0)l_{y+0}\right] - \left[-T_{80} + T_y\right]$$

$$= \left[-80l_{80} + yl_y\right] + \left[-T_{80} + T_y\right]$$

$$= yl_y - 80l_{80} + T_y - T_{80}$$

Akibatnya, integral suku kedua ruas kanan Persamaan (14) menjadi:

$$\int_{63}^{65}\int_0^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy = \int_{63}^{65}\left(y.\,l_y - 80l_{80} + T_y - T_{80}\right)dy$$

Dengan menggunakan Persamaan (3) dan Persamaan (4) diperoleh:

$$= (-y.\,T_y - Y_y)\Big|_{63}^{65} - 80.\,l_{80}.\,y)|_{63}^{65} + (-Y_y)\Big|_{63}^{65} - T_{80}.\,y|_{63}^{65}$$

$$= [(-65T_{65} - Y_{65}) — 63T_{63} - Y_{63}) - 80l_{80}(65-63) + (-Y_{65} - (-Y_{63})) - T_{80}(65-63)$$

$$= -160l_{80} - 2T_{80} - 65T_{65} - 2Y_{65} + 63T_{63} + 2Y_{63} \qquad (24)$$

Sehingga *total lifetime* pada Persamaan (14) sebagai penjumlahan Persamaan (23) dan (24):

$$B = \int_{30}^{63}\int_{63-y}^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy + \int_{63}^{65}\int_0^{80-y}(y+t).\,l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\,dt\,dy \qquad (25)$$

$$= 2079l_{63} - 2640l_{80} + 33T_{63} - 33T_{80} - 160l_{80} - 2T_{80} - 65T_{65} - 2Y_{65}$$

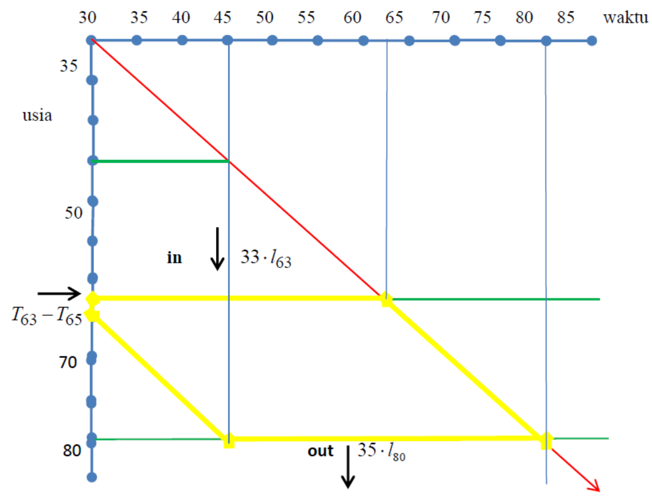
$$= 2079l_{63} - 96T_{63} + 2Y_{63} - 65T_{65} - 2Y_{65} - 2800l_{80} - 35T_{80}$$

Dengan demikian, usia rata-rata untuk individu-individu dalam suatu populasi yang saat ini berusia 30-65 dan meninggal pada usia antara 63-80 adalah rasio antara Persamaan (25) dan (19), yaitu:

$$\text{usia rata} - \text{rata} = \frac{B}{A} = \frac{2079l_{63} - 96T_{63} + 2Y_{63} - 65T_{65} - 2Y_{65} - 2800l_{80} - 35T_{80}}{33l_{63} - 35l_{80} + T_{63} - T_{65}} \tag{26}$$

3.6 Penyelesaian Contoh Soal 1 dengan Diagram Lexis

Penyelesaian dengan diagram Lexis menempatkan usia populasi pada sumbu tegak dan waktu (usia) terjadinya kematian pada sumbu mendatar. Kedua sumbu mempunyai satuan tahun sehinga panjang interval yang sama menyatakan jarak usia yang sama**.** Umur populasi adalah 30-65 dan meninggal pada usia antara 63-80. Pada sumbu tegak dituliskan usia dari 30-65 dan pada sumbu mendatar dituliskan waktu peristiwa terjadi yaitu 63-80 (Gambar 3).



Gambar 3. Diagram Lexis untuk Contoh Soal 1

Perhatikan daerah yang dilingkupi oleh warna kuning pada Gambar 3. Pandang daerah tersebut sebagai wilayah suatu negara, yang dibatasi oleh daratan dan lautan. Batas-batas daratan adalah garis mendatar dan tegak. Batas-batas lautan adalah garis diagonal. Dalam wilayah negara tersebut, penduduknya dapat melakukan migrasi, baik imigrasi (migrasi *in*/masuk) maupun emigrasi (migrasi *out*/keluar). Sebagai kesepakatan, migrasi masuk dan keluar hanya dapat melalui batas negara yang berupa daratan (garis tegak atau mendatar). Untuk migrasi masuk dapat dilakukan lewat arah utara dan timur. Untuk migrasi keluar dilakukan arah barat dan selatan.

Pada Gambar 3, terdapat lima buah garis kuning, masing-masing dua garis diagonal, dua garis mendatar dan satu garis tegak. Kedua garis diagonal sejajar atau berhimpit dengan garis berwarna merah. Pada garis mendatar pertama terdapat kelompok individu yang berumur 63 tahun, ditulis l_{63}. Individu tersebut dari arah utara sehingga posisinya adalah migrasi *in*. Oleh karena panjang garis kuning tersebut adalah 33 (dari 63 – 30), maka banyaknya individu yang masuk adalah $33 \cdot l_{63}$. Garis kuning mendatar kedua pada posisi usia 80 sehingga terdapat mempunyai kelompok individu dengan usia 80, ditulis l_{80}. Individu tersebut dari arah selatan sehingga posisinya adalah migrasi *out*. Oleh karena panjang garis kuning tersebut adalah 35 (dari 80 – 45), maka banyaknya individu yang masuk adalah $35 \cdot l_{80}$. Garis kuning tegak bermula pada posisi 63 dan berakhir pada posisi 65. Garis tersebut berada pada posisi sebelah barat sehingga posisinya adalah migrasi *in*. Banyaknya individu yang masuk wilayah suatu negara dari arah barat pada usia antara 63 dan 65 dinyatakan dengan $T_{63} - T_{65}$. Banyaknya populasi (individu) yang dianalisis adalah migrasi *in* dikurangi migrasi *out*, yaitu $33 \cdot l_{63} + T_{63} - T_{65} - 35 \cdot l_{80}$. Hasil ini sama persis dengan solusi bagian *A* yang dikerjakan dengan integral ganda.

Selanjutnya dihitung *total lifetime* untuk seluruh individu yang kita analisis. Jumlah total individu yang dianalisis adalah $33 \cdot l_{63} + T_{63} - T_{65} - 35 \cdot l_{80}$. Dengan menggunakan metode Grace-Nesbitt pada persamaan (5) dan (6), diperoleh *total lifetime* untuk masing-masing komponen adalah:

total lifetime untuk komponen $33 \cdot l_{63}$ adalah $33 \cdot (63 \cdot l_{63} + T_{63})$

total lifetime untuk komponen $35 \cdot l_{80}$ adalah $35 \cdot (80 \cdot l_{80} + T_{80})$

total lifetime untuk komponen $T_{63} - T_{65}$ adalah $(63 \cdot T_{63} + 2 \cdot Y_{63}) - (65 \cdot T_{65} + 2 \cdot Y_{65})$

sehingga *total lifetime* keseluruhan adalah:

$$\textit{total lifetime} = 33 \cdot (63 \cdot l_{63} + T_{63}) + (63 \cdot T_{63} + 2 \cdot Y_{63}) - (65 \cdot T_{65} + 2 \cdot Y_{65}) - 35 \cdot (80 \cdot l_{80} + T_{80})$$

$$= 2079 \cdot l_{63} + 96 \cdot T_{63} + 2 \cdot Y_{63} - 65 \cdot T_{65} - 2 \cdot Y_{65} - 2800 \cdot l_{80} - 35 \cdot T_{80}$$

Hasil ini sama persis dengan solusi menggunakan integral ganda. Jadi,

$$\text{usia rata} - \text{rata} = \frac{B}{A} = \frac{2079 l_{63} - 96 T_{63} + 2 Y_{63} - 65 T_{65} - 2 Y_{65} - 2800 l_{80} - 35 T_{80}}{33 l_{63} - 35 l_{80} + T_{63} - T_{65}}$$

Hasil ini sama dengan Persamaan (26).

3.7 Penyelesaian Contoh Soal 2 dengan Integral Ganda

Perhatikan contoh soal 2 pada bagian metodologi. Pada contoh soal 2 terdapat penambahan informasi kematian terjadi dalam waktu 40 tahun dari saat ini. Berdasarkan penyelesaian dari contoh soal 1, *total lifetime* pada Persamaan (14) diubah menjadi tiga buah integral. Suku pertama ruas kanan Persamaan (14) diubah menjadi dua buah integral, sedangkan suku kedua ruas kanan tetap, diperoleh:

$$\textit{Total lifetime} = \int_{30}^{40} \int_{60-y}^{40} f(y,t) \,.\, l_{y+t} . \mu_{y+t} dt\, dy + \int_{40}^{60} \int_{60-y}^{80-y} f(y,t) .\, l_{y+t} \,.\, \mu_{y+t}\, dt\, dy + \int_{60}^{65} \int_{0}^{80-y} f(y,t) .\, l_{y+t} \,.\, \mu_{y+t}\, dt\, dy \tag{27}$$

Contoh soal 2 hanya menghitung *total lifetime*, maka ambil $f(y+t) = y + t$. Penyelesaian dilakukan berturut-turut untuk suku pertama, kedua dan ketiga Persamaan (27). Integral suku pertama:

$$\text{Suku pertama} = \int_{30}^{40} \left[\int_{60-y}^{40} f(y,t) \,.\, l_{y+t} . \mu_{y+t} dt \right] dy \tag{28}$$

Penyelesaian terhadap variabel *t* adalah mengitung bagian dalam Persamaan (28), yaitu:

$$\int_{60-y}^{40} (y+t) \,.\, l_{y+t} . \mu_{y+t}\, dt$$

Misal: $u = y + t$ $\qquad$ $dv = l_{y+t} . \mu_{y+t}\, dt$

$du = dt$ $\qquad$ $v = \int l_{y+t} \,.\, \mu_{y+t}\, dt = -l_{y+t}$

Diperoleh

$$\int_{60-y}^{40} (y+t) \,.\, l_{y+t} . \mu_{y+t}\, dt\, dy = (y+t)(-l_{y+t})\Big|_{60-y}^{40} - \int_{60-y}^{40} (-l_{y+t})\, dt$$

$$= (y+t)(-l_{y+t})\Big|_{60-y}^{40} + \int_{60-y}^{40} l_{y+t}\, dt$$

$$= -(y+t) l_{y+t}\Big|_{60-y}^{40} + (-T_{y+t})\Big|_{60-y}^{40}$$

$$= \left[(-(y+40) l_{y+40}) - (-(y+60-y) l_{y+60-y}) \right] + \left[(-T_{y+40}) - (-T_{y+60-y}) \right]$$

$$= -(y+40) l_{y+40} + 60 l_{60} - T_{y+40} + T_{60}$$

$$= -(y+40) l_{y+40} - T_{y+40} + 60 l_{60} + T_{60}$$

Selanjutnya, Persamaan (28) menjadi:

Suku pertama = $\int_{30}^{40}\int_{60-y}^{40} (y+t)\,.\,l_{y+t}.\mu_{y+t} dt\, dy$

$$= \int_{30}^{40}\left(-(y+40)l_{y+40} - T_{y+40} + 60l_{60} + T_{60}\right)\, dy$$

$$= 60l_{60}\int_{30}^{40} dy + T_{60}\int_{30}^{40} dy - \int_{30}^{40}(y+40)l_{y+40} d(y+40) - \int_{30}^{40} T_{y+40} d(y+40)$$

$$= 600l_{60} + 10T_{60} - \left[-\left((y+40)T_{y+40} + Y_{y+40}\right)\right]\Big|_{30}^{40} - \left[(-Y_{y+40})\right]\Big|_{30}^{40}$$

$$= 600l_{60} + 10T_{60} - \left[-(80T_{80} + Y_{80}) - \left(-(70T_{70} + Y_{70})\right)\right] - \left[(-Y_{80}) - (-Y_{70})\right]$$

$$= 600l_{60} + 10T_{60} - [70T_{70} - 80T_{80} + Y_{70} - Y_{80}] - [Y_{70} - Y_{80}]$$

$$= 600l_{60} + 10T_{60} - 70T_{70} + 80T_{80} - 2Y_{70} + 2Y_{80} \tag{29}$$

Penyelesaian suku kedua Persamaan (27):

$$\text{Suku kedua} = \int_{40}^{60}\int_{60-y}^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\, dt\, dy \tag{30}$$

Penyelesaian terhadap variabel *t* adalah mengitung bagian dalam Persamaan (30), yaitu

$$\int_{60-y}^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\, dt$$

Misal: $u = y + t$ $\quad dv = l_{y+t}.\,\mu_{y+t}\, dt$

$du = dt$ $\quad v = \int l_{y+t}.\,\mu_{y+t}\, dt = -l_{y+t}$

Diperoleh

$$\int_{60-y}^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\, dt = (y+t)\left(-l_{y+t}\right)\Big|_{60-y}^{80-y} - \int_{60-y}^{80-y} -l_{y+t}\, dt$$

$$= -(y+t)\left(l_{y+t}\right)\Big|_{60-y}^{80-y} + \left(-T_{y+t}\right)\Big|_{60-y}^{80-y}$$

$$= \left[\left(-(y+80-y)l_{y+80-y}\right) - \left(-(y+60-y)l_{y+60-y}\right)\right] + \left[\left(-T_{y+80-y}\right) - \left(-T_{y+60-y}\right)\right]$$

$$= -80l_{80} + 60l_{60} - T_{80} + T_{60}$$

Selanjutnya, integral suku kedua pada Persamaan (30) menjadi:

$$\int_{40}^{60}\int_{60-y}^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\, dt\, dy = \int_{40}^{60}(-80l_{80} + 60l_{60} - T_{80} + T_{60})\, dy$$

$$= [-80l_{80}.\,y + 60l_{60}.\,y - T_{80}.\,y + T_{63}.\,y]|_{40}^{60}$$

$$= -80l_{80}(60-40) + 60l_{60}(60-40) - T_{80}(60-40) + T_{60}(60-40)$$

$$= -1600l_{80} + 1200l_{60} - 20T_{80} + 20T_{60} \tag{31}$$

Penyelesaian suku ketiga Persamaan (27):

$$\text{Suku ketiga} = \int_{60}^{65}\int_{0}^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\,\mu_{y+t}\, dt\, dy \tag{32}$$

Penyelesaian terhadap variabel *t* adalah menghitung bagian dalam Persamaan (32), yaitu

$$\int_0^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\, \mu_{y+t}\, dt$$

Misal: $u = y + t$ $\qquad dv = l_{y+t}.\, \mu_{y+t}\, dt$

$du = dt$ $\qquad v = \int l_{y+t}.\, \mu_{y+t}\, dt = -l_{y+t}$

Diperoleh:

$$\int_0^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\, \mu_{y+t}\, dt = (y+t)\left(-l_{y+t}\right)\Big|_0^{80-y} - \int_0^{80-y} -l_{y+t}\, dt$$

$$= -(y+t)\left(-l_{y+t}\right)\Big|_0^{80-y} + \left(-T_{y+t}\right)\Big|_0^{80-y}$$

$$= \left[\left(-(y+80-y)l_{y+80-y}\right) - \left(-(y+0)l_{y+0}\right)\right] + \left[-T_{y+80-y} - \left(-T_{y+0}\right)\right]$$

$$= -80l_{80} + yl_y - T_{80} + T_y$$

Selanjutnya, integral suku ketiga pada Persamaan (27) menjadi

$$\int_{60}^{65}\int_0^{80-y} (y+t).\, l_{y+t}\,.\, \mu_{y+t}\, dt\, dy = \int_{60}^{65}\left(-80l_{80} + yl_y - T_{80} + T_y\right) dy$$

$$= \left[-80l_{80}.\, y - y.\, T_y - Y_y - T_{80}.\, y - Y_y\right]\Big|_{60}^{65}$$

$$= [-80l_{80}(65-60)] + [(-65T_{65} - Y_{65}) - (-63T_{63} - Y_{63})] +$$

$$[-T_{80}.\,(65-60)] + [-Y_{65} - (-Y_{63})]$$

$$= -400l_{80} - 5T_{80} - 65T_{65} - 2Y_{65} + 60T_{60} + 2Y_{60} \qquad (33)$$

Dengan demikian, *total lifetime* pada Persamaan (27) adalah penjumlahan dari (29), (31) dan (33):

$$\textit{Total lifetime} = [600l_{60} + 10T_{60} - 70T_{70} + 80T_{80} - 2Y_{70} + 2Y_{80}] +$$

$$[-1600l_{80} + 1200l_{60} - 20T_{80} + 20T_{60}] +$$

$$[-400l_{80} - 5T_{80} - 65T_{65} - 2Y_{65} + 60T_{60} + 2Y_{60}]$$

$$= 1800l_{60} - 2000l_{80} + 90T_{60} - 65T_{65} - 70T_{70} + 55T_{80}$$

$$+2Y_{60} - 2Y_{65} - 2Y_{70} + 2Y_{80}$$

3.8 Penyelesaian Contoh Soal 2 dengan Diagram Lexis

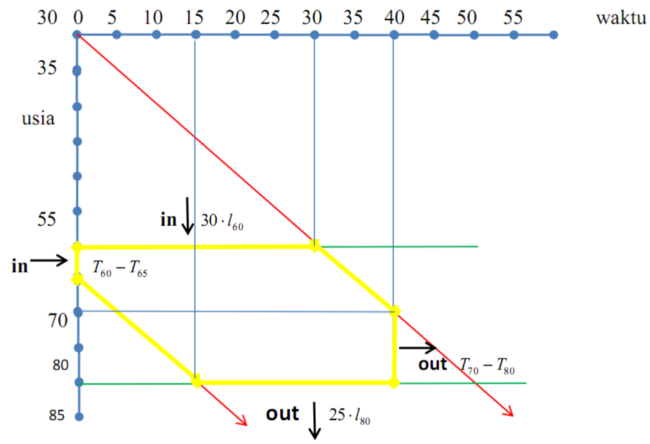
Pada contoh soal 2 hanya dihitung *total lifetime* untuk individu-individu dalam suatu populasi yang saat ini berusia antara 30-65 dan meninggal pada usia antara 60-80 dalam waktu 40 tahun dari saat ini. Perbedaan dengan contoh soal 1 pada adanya penambahan frase “dalam waktu 40 tahun dari saat ini”. Syarat ini diterapkan pada sumbu mendatar dengan mengubah sumbu mendatar mulai dari 0.

Perhatikan daerah yang dilingkupi oleh warna kuning pada Gambar 4. Migrasi *in* dari arah utara ($30 \cdot l_{60}$) ditambah arah barat ($T_{60} - T_{65}$). Migrasi *out* dari arah selatan ($25 \cdot l_{80}$) ditambah arah timur ($T_{70} - T_{80}$). Angka 30 pada $30 \cdot l_{60}$ berasal dari (30 – 0). Angka 25 pada $25 \cdot l_{80}$ dari (40 – 15).

Banyaknya individu dalam area yang dibatasi oleh garis kuning adalah:

$$\text{Jumlah Individu} = 30 \cdot l_{60} + T_{60} - T_{65} - 25 \cdot l_{80} - \left(T_{70} - T_{80}\right)$$

$$= 30 \cdot l_{60} - 25 \cdot l_{80} + T_{60} - T_{65} - T_{70} + T_{80}$$



Gambar 4. Diagram Lexis untuk Contoh Soal 2

Dengan menggunakan metode Grace-Nesbitt pada Persamaan (5) dan (6), diperoleh:

$$\text{Jumlah Individu} = 30 \cdot l_{60} - 25 \cdot l_{80} + T_{60} - T_{65} - T_{70} + T_{80}$$

$$\begin{aligned} \textit{Total lifetime} &= 30 \cdot (60 \cdot l_{60} + T_{60}) - 25 \cdot (80 \cdot l_{80} + T_{80}) + \\ &\quad (60 \cdot T_{60} + 2 \cdot Y_{60}) - (65 \cdot T_{65} + 2 \cdot Y_{65}) - \\ &\quad (70 \cdot T_{70} + 2 \cdot Y_{70}) + (80 \cdot T_{80} + 2 \cdot Y_{80}) \end{aligned}$$

atau

$$\textit{Total lifetime} = \begin{matrix} 1.800 \cdot l_{60} + 90 \cdot T_{60} + 2 \cdot Y_{60} - 65 \cdot T_{65} - 2 \cdot Y_{65} - \\ 2.000 \cdot l_{80} - 70 \cdot T_{70} - 2 \cdot Y_{70} + 55 \cdot T_{80} + 2 \cdot Y_{80} \end{matrix}$$

Artikel ini memberikan dua contoh soal terkait penentuan jumlah populasi dan *total lifetime*. Metode integral ganda dapat digunakan untuk menghitung kedua kuantitas yang dicari. Diagram Lexis digunakan untuk menghitung jumlah populasi, sedangkan metode Grace-Nesbitt dipakai dalam perhitungan *total lifetime*. Berdasarkan dua contoh yang diberikan, penggunaan metode integral ganda dan diagram Lexis memberikan hasil yang tepat sama dalam menentukan jumlah populasi. Metode integral ganda dan metode Grace-Nesbitt juga memberikan hasil yang sama dalam perhitungan *total lifetime*. Contoh-contoh pendukung yang memperlihatkan hasil yang sama tersedia pada [5] [18]. Diagram Lexis dipandang sebagai penyederhanaan dari metode integral ganda untuk menghitung jumlah populasi. Sedangkan metode Grace-Nesbitt merupakan penyederhanaan dari metode integral ganda untuk menghitung *total lifetime*.

4. KESIMPULAN

Metode integral ganda dan diagram Lexis merupakan dua buah metode yang digunakan untuk menentukan *total lifetime*. Penggunaan integral ganda dan diagram Lexis menghasilkan nilai *total lifetime* yang sama. Dengan menggunakan integral ganda dan diagram Lexis, untuk contoh soal 1 dapat diperoleh hasil dari perhitungan *total lifetime* adalah:

$$\textit{Total lifetime} = 2079 l_{63} - 96 T_{63} + 2 Y_{63} - 2800 l_{80} - 35 T_{80} - 65 T_{65} - 2 Y_{65}$$

Kemudian untuk contoh soal 2, diperoleh hasil *total lifetime* sebesar:

$$\textit{Total lifetime} = \begin{matrix} 1.800 \cdot l_{60} + 90 \cdot T_{60} + 2 \cdot Y_{60} - 65 \cdot T_{65} - 2 \cdot Y_{65} - \\ 2.000 \cdot l_{80} - 70 \cdot T_{70} - 2 \cdot Y_{70} + 55 \cdot T_{80} + 2 \cdot Y_{80} \end{matrix}$$

Perhitungan *total lifetime* menggunakan integral ganda dan diagram Lexis memberikan hasil yang sama. Sedangkan rata-rata usia pada contoh soal 1 dan contoh soal 2 berturut-turut adalah

$$\text{Usia rata} - \text{rata} = \frac{2079l_{63} - 96T_{63} + 2Y_{63} - 65T_{65} - 2Y_{65} - 2800l_{80} - 35T_{80}}{33l_{63} - 35l_{80} + T_{63} - T_{65}}$$

$$\text{Usia rata} - \text{rata} = \frac{1.800 \cdot l_{60} + 90 \cdot T_{60} + 2 \cdot Y_{60} - 65 \cdot T_{65} - 2 \cdot Y_{65} - 2.000 \cdot l_{80} - 70 \cdot T_{70} - 2 \cdot Y_{70} + 55 \cdot T_{80} + 2 \cdot Y_{80}}{30 \cdot l_{60} - 25 \cdot l_{80} + T_{60} - T_{65} - T_{70} + T_{80}}$$

Untuk penelitian selanjutnya, dapat mengimplementasikan penggunaan integral ganda dan diagram Lexis dengan menggunakan persoalan yang lebih kompleks. Persoalan ini dapat berupa data untuk menemukan kematian pada grafik sederhana sesuai dengan tiga koordinat demografis yaitu, saat kematian, usia orang yang meninggal pada saat kematian, dan saat kelahiran orang tersebut. Dengan kata lain, diagram Lexis dapat berfungsi sebagai alat bantu untuk memahami hubungan antara umur seseorang dengan variabel demografi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] N. Keyfitz, Introduction to the Mathematics and Population, Masshachussetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

[2] D. R. Cox, "Regression and Life-Tables(with Discussion)," *Journal of the Royal Statistical Society Series B,* vol. 34, no. 2, pp. 187-220, 1972.

[3] W. Lexis, "La Représentation graphique de la mortalité au moyen de points mortuaires," *Annales de Demographie Internationale,* vol. IV, pp. 297-324, 1880.

[4] K. H. &. K. O. Tesárková, "A Few Notes on the Lexis Diagram: The 100th Anniversary of the Death of Wilhem Lexis," *Demografie,* vol. 56, no. 4, pp. 277-290, 2014.

[5] R. Brown, Introduction to the Mathematics of Demography, 3rd Ed., USA: Actex Oublications, 1997.

[6] C. Vandeschrick, "The Lexis Diagram," *Demographic Research,* vol. 3, no. 4, pp. 97-124, 2001.

[7] G. Feeney, "Lexis Diagram," pp. 586-588, 2005.

[8] I. Irma, Diagram Lexis, Kuningan: Sekolah Tinggi Ilmu Kesehatan, 2005.

[9] R. Rau, C. Bohk-Ewald, M. Muszynska and J. Vaupel, Vizualizing Mortality Dynamics in the Lexis Diagram, Dordrecht: Springer Series in Demographic Method and Population Analysis, 2017.

[10] J. Scholey and F. Willekens, "Vizualizing Compositional Data on the Lexis Surface," *Demographic Research,* vol. 36, pp. 627-658, 2017.

[11] S. Dahlin, "Exploring the Usefulness of Lexis Diagrams of Quality Improvement," *BMC Medical Informatics and Decision Making,* vol. 20, no. 7, pp. 1-13, 2020.

[12] G. A. Mensah, G. S. Wei, P. D. Sorlie, L. J. Fine and D. Gordon, "Decline in Cardiovascular Mortality, Possible Causes and Implications," *Circulation Research,* vol. 120, pp. 336-380, 2017.

[13] B. Carstensen, "Demography and Epidemiology: Practical Use of the Lexis Diagram in the Computer Age," *Annual Meeting of Finnish Statistical Society,* pp. 1-30, 2005.

[14] J. Whitehead, "Fitting Cox's Regression Model to Survival Data Using GLIM," *Applied Statistics*, vol. 29, no. 3, pp. 268-275, 2004.

[15] H. Brenner, O. Gefeller and T. Hakulinen, "Period Analysis for "Up-to-Date' Cancer Survival Data: Theory, Empirical Valuation, Computational Realisation and Applications," *European Journal Cancer*, vol. 40, no. 3, pp. 326-335, 2004.

[16] P. Hovind, L. Tarnow, P. Rossing, B. Carstensen and H. H. Parving, "Improved Survival in Patients Obtaining Remission of Nephrotic Range Albuminuria in Diabetic Nephropathy," *Kidney International*, vol. 66, no. 3, pp. 1190-1186, 2004.

[17] N. Keiding, "Age-Period-Cohort Analysis in the 1870s: Diagrams, Stereograms, and the Basic Differential Equation," *Canadian Journal of Statistics*, vol. 39, no. 3, pp. 405-420, 2011.

[18] K. P. Veit, "Stationary Population Method," *Transaction of Society of Actuaries*, vol. 16, pp. 233-264, 1964.